DECISIÓN MULTICRITERIO

JOSÉ MARÍA MORENO JIMÉNEZ

moreno@unizar.es

<http://gdmz.unizar.es>
Facultad de Económicas
Universidad de Zaragoza

TÉCNICAS CON INFORMACIÓN A PRIORI-I

1. Introducción
2. Búsqueda de Metas
   - Modelos de Satisfacción
   - Modelos de Compromiso
3. Programación por Compromiso
   - Planteamiento
   - Cálculo
   - Propiedades
4. Programación por Metas
   - Planteamiento
   - Cálculo
   - Propiedades

PROGRAMACIÓN POR METAS

- La **Programación Multiobjetivo** está orientada a la obtención de soluciones paretianas eficientes. Este enfoque tiene un gran problema, es casi imposible, no ya una representación exacta del conjunto eficiente, sino una buena aproximación.
- La **Programación por Compromiso** (PPC) introduce las preferencias del decisor de una manera realista e ingeniosa.
- La **Programación por Metas** (PPM) se aleja de la idea de optimización, centrándose en la de satisfacción (Simon, 1955).
- La PPM (Charnes y Cooper y Ferguson, 1955) constituye la dimensión operativa de la filosofía satisfacente. No fue hasta mediados de los 70 cuando se desarrollaron y popularizan (Ijiri, 1965; Lee, 1972; Ignizio, 1976).

PROGRAMACIÓN POR METAS

- La **Programación por Metas** (PPM) introduce un conjunto de nuevas restricciones (débiles) que reflejan las metas perseguidas.

$$z_j(x) + d_j^- - d_j^+ = \hat{z}_j, \quad j = 1, \ldots, r$$

- El modelo que resuelve la PPM es:

$$\begin{aligned} & Min_x \quad \sum_{j=1}^{r} w_j (d_j^- + d_j^+) \\ & z_j(x) + d_j^- - d_j^+ = \hat{z}_j, \quad j = 1, \ldots, r \\ & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x \ge 0, d_j^- \ge 0, d_j^+ \ge 0. \end{aligned}$$

- Es es un caso particular de la PPC con p=1, en el que se han incluidos como restricciones débiles las metas.

METAS PONDERADAS

- La minimización de las desviaciones expresadas **directamente carece de sentido** ya que las desviaciones consideradas están evaluadas en diferentes unidades (su suma no tiene significado)
- Para obviar este inconveniente se puede **normalizar** cada desviación con el valor del término independiente.

$$Min \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (d_j^- + d_j^+) / \hat{z}_j$$

- Para poder ser tomada como un subrogado de las preferencias, el decisor debe incorporar sus preferencias sobre las desviaciones (distinta importancia) ponderándolas.

METAS LEXICOGRÁFICAS

- En este caso los logros son inconmensurablemente preferidos P1>>P2 >>…>>Pr. En el caso de minimización lexicográfica se traduce en el siguiente vector

$$\textbf{Lex min } \mathbf{a} = [h_1 (d^-,d^+), \ldots, h_r (d^-,d^+)]$$

o de manera más abreviada con $a_j = h_j (d^-,d^+)$.

$$\textbf{Lex min } \mathbf{a} = [a_1, \ldots, a_r]$$

- Puede ocurrir que dos objetivos estén medidos en las mismas unidades aunque las aspiraciones sean diferentes por lo que deberían normalizarse. Al igual que sucede con los modelos de metas ponderados, en los modelos jerarquizados, los análisis pueden enriquecerse sometiendo a un análisis de sensibilidad.

- Resolución:
  - **Método gráfico** (Lee 1972, Ignizio 1976)
  - **Método secuencial** (Dauer y Krueger 1977; Ignizio, 1978)
  - **Multifase** (Lee 1972, Ignizio, 1976).
- Ejemplo **Método Gráfico**:
- El **Método Secuencial** exige resolver una secuencia de programas lineales cuyo número máximo coincide con el número de niveles de prioridad que tenga el modelo. El número de problemas lineales se reducirá, cuando al resolver uno de ellos no se detecte la existencia de óptimos alternativos, en tal caso, el proceso de cálculo se detiene.
- Si se desea realizar un análisis de sensibilidad el método secuencial no es el más apropiado utilizándose **el método del simplex modificado** (**multifase**, Lee 1972, Ignizio, 1976).

- Para resolver los modelos de metas lexicográficas por el **método secuencial** se resuelven los siguientes modelos:

$$\begin{aligned} &Modelo\ 1: \\ &Min_x \quad a_1 = h_1(d_1^-, d_1^+) \\ &\qquad z_1(x) + d_1^- - d_1^+ = \hat{z}_1, \\ &\qquad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\qquad x \ge 0, d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Modelo\ 2: \\ &Min_x \quad a_2 = h_2(d_2^-, d_2^+) \\ &\qquad z_2(x) + d_2^- - d_2^+ = \hat{z}_2, \\ &\qquad z_1(x) + (d_1^-)^* - (d_1^+)^* = \hat{z}_1, \\ &\qquad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\qquad x \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Modelo\ k: \\ &Min_x \quad a_k = h_k(d_k^-, d_k^+) \\ &\qquad z_k(x) + d_k^- - d_k^+ = \hat{z}_k, \\ &\qquad z_j(x) + (d_j^-)^* - (d_j^+)^* = \hat{z}_j, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ &\qquad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\qquad x \ge 0, d_k^- \ge 0, d_k^+ \ge 0. \end{aligned}$$

k=1,…,r

EJEMPLO 3: PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN (PPM)

Una empresa fabrica dos tipos de piezas A y B. Cada una de ellas requiere para su fabricación las cantidades de materia prima M1 y M2 que se indican en la siguiente tabla:

Materia Prima\ Piezas	A	B	Disponibilidad
M1	2	1	200
M2	4	3	450
Beneficio	5	3	

La empresa desea saber cuál es el número de piezas que debe fabricar para cada tipo si se fijan las siguientes metas con prioridades jerarquizadas (P1>>P2>>P3):

P1: Obtener un beneficio no inferior a 450 u.m.

P2: Fabricar al menos 120 piezas

P3: Fabricar el mayor número de piezas posible de B

Calcular:

1. La solución del problema anterior mediante el Método Gráfico
2. La solución mediante el Método Secuencial (Solver)
3. La solución mediante el Método Multifase (QSB)

EJEMPLO 3

- Modelización:
  - Sean x_1 y x_2 el número de unidades de A y B fabricadas (v's decisión)
  - Las restricciones fuertes del modelo son:

    [M1] $2x_1 + 1x_2 \leq 200$

    [M2] $4x_1 + 3x_2 \leq 450$

    No negatividad son $x_j \geq 0$
  - Las restricciones débiles (metas) son:

    [P1] (beneficio ≥ 450) $5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450$

    [P2] (piezas fab. ≥ 120) $x_1 + x_2 + d2- \geq 120$

    [P3] (maximizar x2, M>>0) $x_2 + d3- \leq M=150$
  - La Función Objetivo es:

    Lex Min a = [a1, a2, a3] = [d1-, d2-, d3-]

EJEMPLO 3

- Resolución Ejemplo 3
  - **Método Gráfico**
  - **Método Secuencial**
  - **Método Multifase**

- Método Secuencial
  - **Paso 1: a_1*=o** **Paso 2: a_2*=o** **Paso 3: a_3*=o**

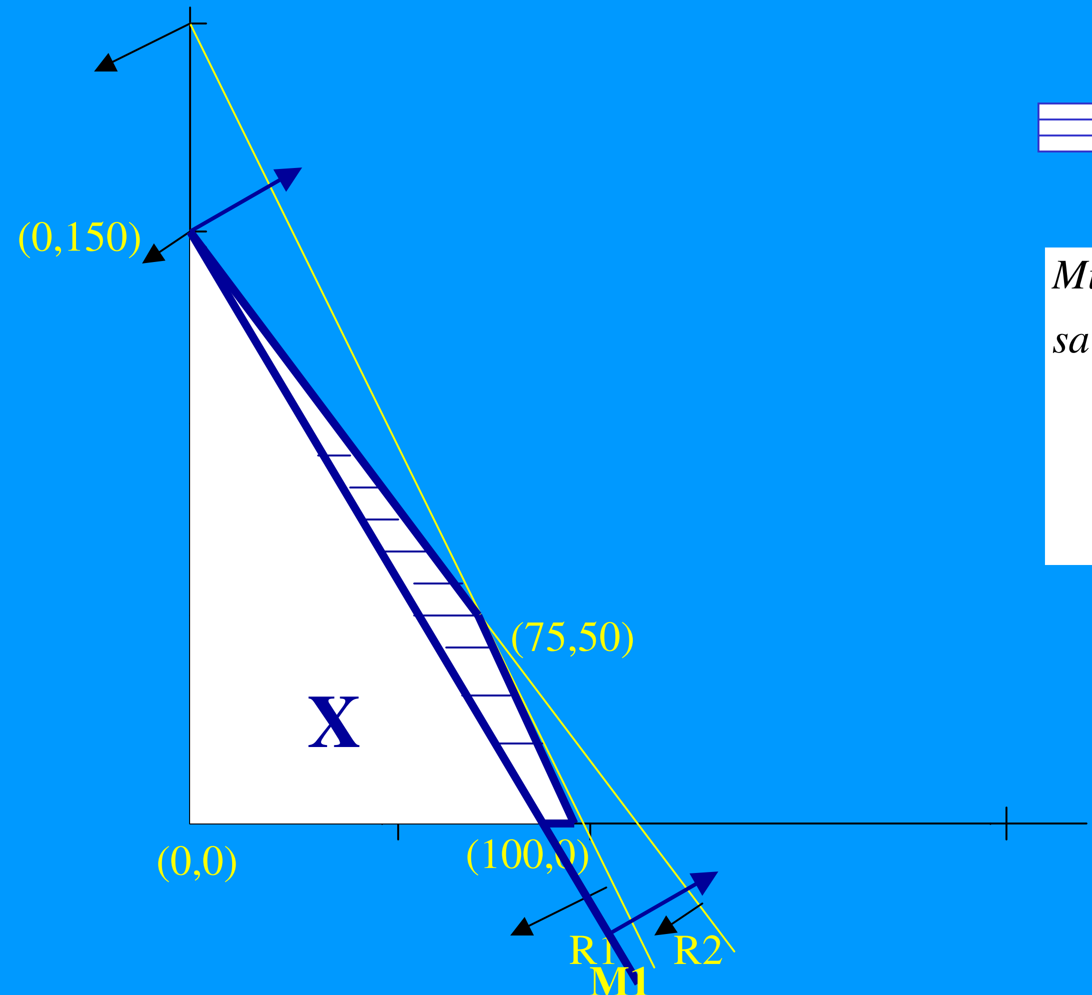
$$\begin{array}{lll} Min & a_1 = d1- & \\ sa & 5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450 & \\ & 2x_1 + x_2 + \quad \leq 200 & \\ & 4x_1 + 3x_2 + \quad \leq 450 & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Min & a_2 = d2- & & \\ sa & x_1 + x_2 + d2- \geq 120 & & \\ & 5x_1 + 3x_2 & \geq 450 & (P1) \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 200 & \\ & 4x_1 + 3x_2 & \leq 450 & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Min & a_3 = d3- & & \\ sa & x_2 + d3- \leq 150 & & \\ & x_1 + x_2 & \geq 120 & (P2) \\ & 5x_1 + 3x_2 & \geq 450 & (P1) \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 200 & \\ & 4x_1 + 3x_2 & \leq 450 & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

  - **Solución: x_1=0 y x_2=150 con a*=[0,0,0]**

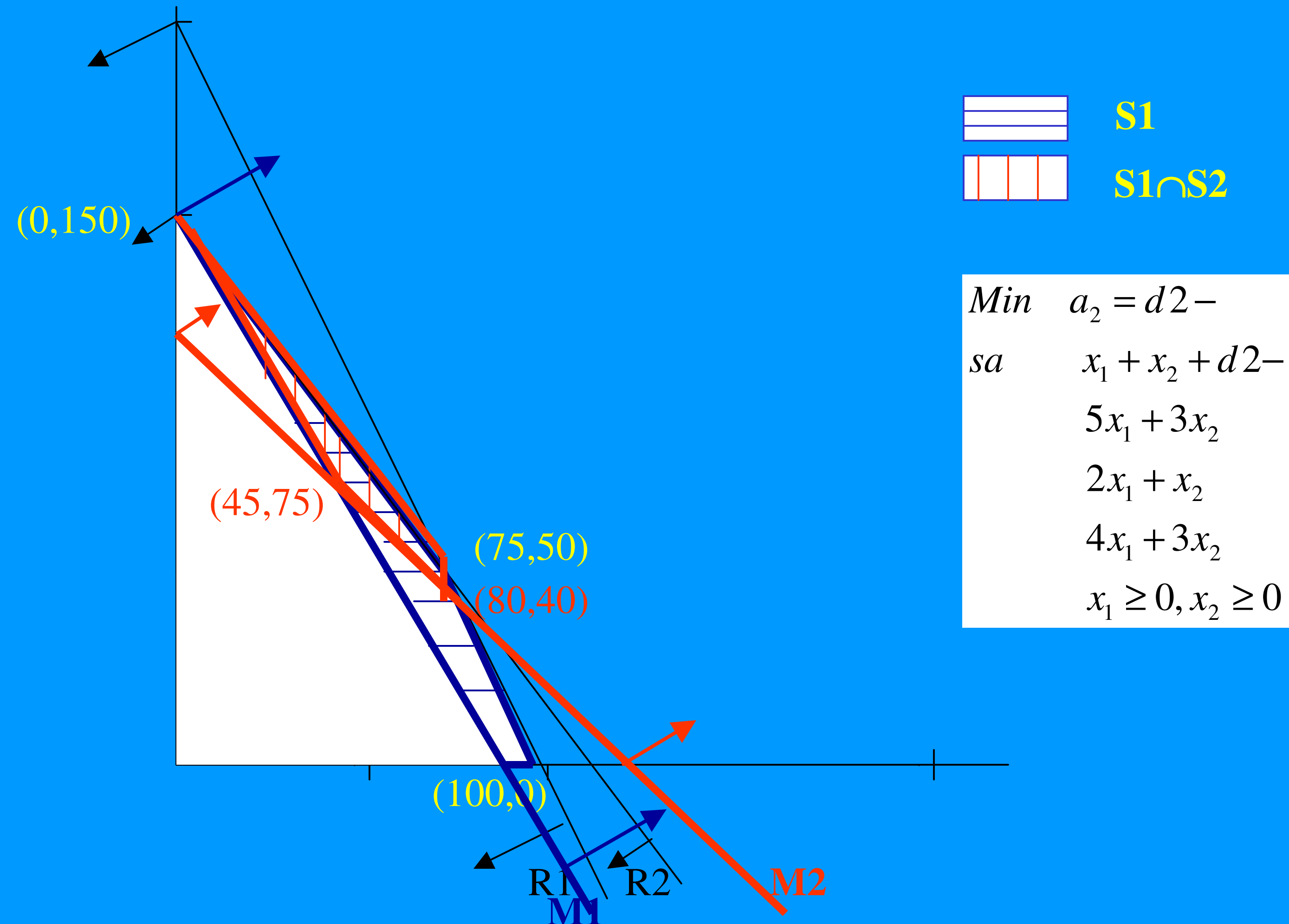
EJEMPLO 3



S1

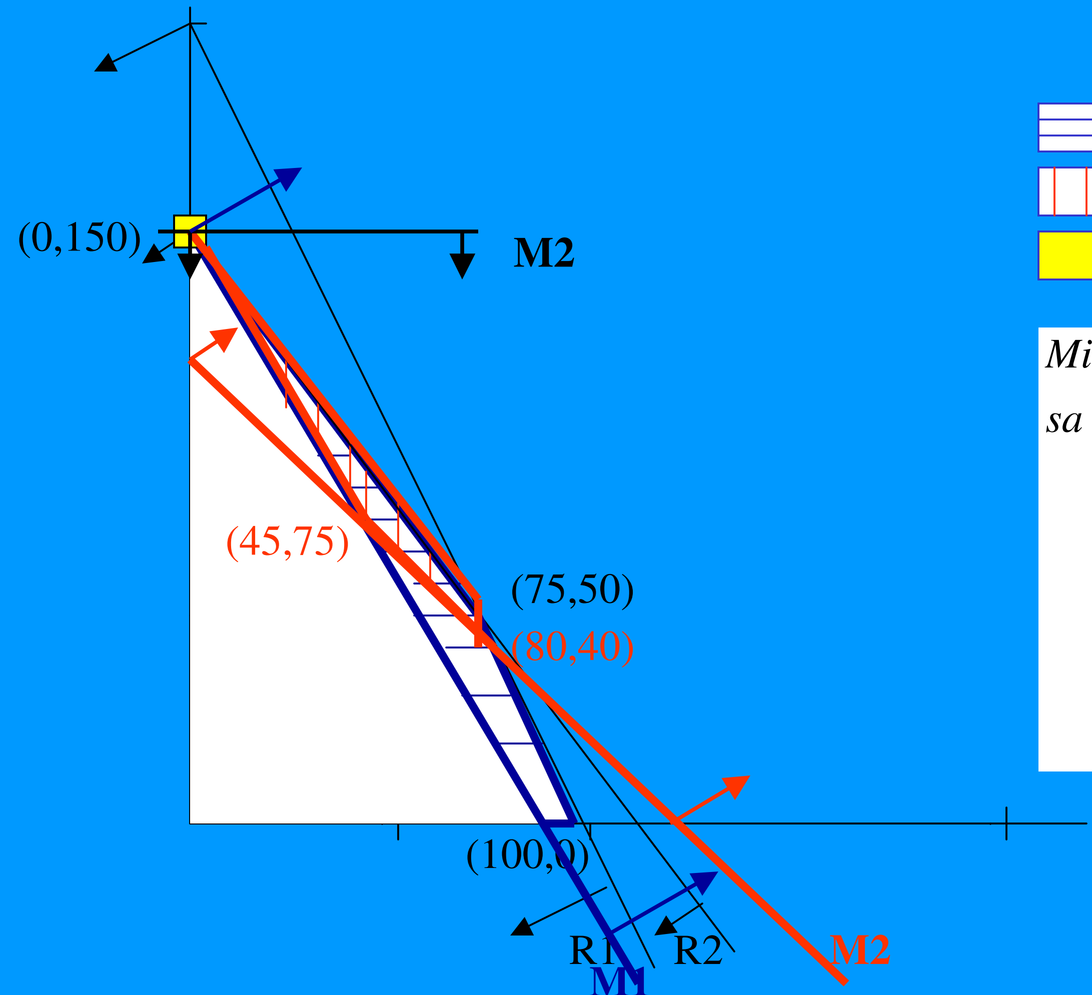
$$
\begin{array}{ll}
Min & a_1 = d1- \\
sa & 5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450 \\
 & 2x_1 + x_2 + \quad \leq 200 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + \quad \leq 450 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

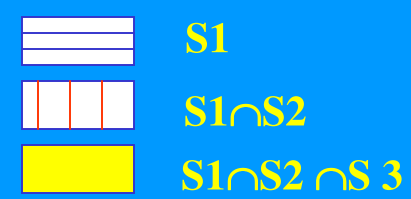
EJEMPLO 3



$$
\begin{array}{lll}
Min & a_2 = d2- & \\
sa & x_1 + x_2 + d2- \geq 120 & \\
& 5x_1 + 3x_2 \geq 450 & (P1) \\
& 2x_1 + x_2 \leq 200 & \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 450 & \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

EJEMPLO 3





$$
\begin{array}{lll}
Min & a_3 = d3- & \\
sa & x_2 + d3- \leq 150 & \\
 & x_1 + x_2 \geq 120 & (P2) \\
 & 5x_1 + 3x_2 \geq 450 & (P1) \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 200 & \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 450 & \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

X*=(0,150)

PROGRAMACIÓN POR METAS

- Artur y Ravindran (1978,80) han propuesto un algoritmo partitivo muy prometedor. Existen algoritmos para PPM con **variables enteras** y **bivalentes**. También hay algoritmos para programación por metas **no lineales** (uno es adaptación del método de aproximaciones lineales de Griffit-Stewart; otro es una aplicación de la búsqueda de Hooke y Jeeves).

EXTENSIONES DE LA PPM

- Junto a las metas ponderadas y las lexicográficas, existen otros enfoque como el **MINMAX** (Flavel, 1976) que busca la minimización de la maxima desviación de entre todas las desviaciones posibles. La estructura matemática del modelo es (los α y β son coeficientes normalizadores y al vez indicadores de las preferencias):

PUNTOS CRÍTICOS DE LA PPM

- La PPM constituye un potente instrumento teórico de gran aplicabilidad en el campo del análisis de decisional. En los últimos años algunos autores han apuntado posibles debilidades (Zeleny, 1981).
- En muchos casos los problemas planteados no son inherentes a la lógica que subyace a la PPM, sino que se deben a un uso no satisfactorio del enfoque.
- Muchos de los inconvenientes que se han apuntado se deben a un uso mecanicista del enfoque que no tiene en cuenta un conocimiento preciso de los supuestos subyacentes.

PUNTOS CRÍTICOS DE LA PPM

1. La posible **equivalencia** de las soluciones de los modelos PPM y los modelos tradicionales basados en la optimización de un sólo criterio.
2. La falta de significado y las conclusiones equivocadas a las que se puede llegar cuando la **función de logro** de un modelo basado en metas lexicográficas se formula erróneamente como un escalar en vez de como un vector.
3. Los problemas que pueden surgir cuando innecesariamente se formulan **metas con dos lados**.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

4. Finalmente se evalúan las implicaciones derivadas de la **incompatibilidad** existente entre los ordenes lexicográficos y la existencia de una función de utilidad que ordene las preferencias del centro decisor.
5. La posible **ineficiencia paretiana** de la solución generada por un modelo de PPM, así como los posibles remedios a ese problema.
6. La conceptualización de **meta redundante** y su repercusión en los procesos de optimización lexicográfica.

EQUIVALENCIA DE LAS SOLUCIONES

- Veamos algunas situaciones en las que un modelo de PPM de un cierto problema decisional puede generar la misma solución que un modelo tradicional uniobjetivo.
- En un contexto **lexicográfico**, cuando el valor óptimo de la función de logro toma la forma: $a^*=[0,0,\ldots,a_i, \ldots,a_r]$ no existiendo óptimos alternativos para el i-ésimo problema de la secuencia lexicográfica, entonces la solución óptima coincide con la proporcionada por un modelo convencional caracterizado por la optimización de las meta situadas en la i-ésima prioridad fijando las metas de las prioridades anteriores como restricciones con términos independientes iguales a sus correspondientes niveles de aspiración.

- Por otra parte, si el nivel de aspiración es excesivamente alto (no alcanzable) entonces el problema siguiente es matemáticamente equivalente a la maximización de la función $z_j(x)$ (modelo 2).

Ejercicio 1 (ver enunciado)

$$
\begin{aligned}
&Lex \quad \min \quad a=\left[\left(d_1^+\right),\left(d_2^+\right),\left(d_3^-\right),\left(d_4^+ + d_5^+\right)\right] \\
&sa \\
&\quad G_1: x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\
&\quad G_2: 5x_1 - 10x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\
&\quad G_3: 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 25 \\
&\quad G_4: x_1 + d_4^- - d_4^+ = 8 \\
&\quad G_5: \qquad x_2 + d_5^- - d_5^+ = 3
\end{aligned}
$$

La solución es: a*=[0,0,5,2]

$$x_1 = 10, x_2 = 0, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_2^+ = 0; d_3^- = 5, d_3^+ = 0; d_4^- = 0, d_4^+ = 2; d_5^- = 3, d_5^+ = 0.$$

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- Como el tercer problema de la secuencia no tiene óptimo alternativo, el modelo lexicográfico anterior es equivalente a

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$5x_1 - 10\,x_2 \leq 50$$

la solución es $x_1 = 10$, $x_2 = 0$.

- Este tipo de equivalencia suele presentarse cuando se fijan niveles muy pesimistas (fáciles de alcanzar) para las primeras metas, y muy optimistas los de la i-ésima.
- No conviene incorporar metas redundantes que no juegan un papel real en el proceso de resolución.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- La equivalencia de las soluciones también se presenta en metas **ponderadas**, cuando el nivel de una meta se han fijado de manera muy exigentes u optimistas (muy difícil de alcanzar), mientras que para las restantes metas se han fijado niveles muy pesimistas.
- En tal caso, el modelo de programación matemática equivalente tendrá por función objetivo la optimización de la meta optimista, y por restricciones las propias del problema más las metas pesimistas.
- Ejercicio 2 y modelo 4

EJERCICIO 2. Equivalencia de soluciones. Ponderaciones

$$
\begin{aligned}
&\min \quad D = d_1^- + d_2^- + d_3^- \\
&sa \\
&G_1 : x_1 \qquad + d_1^- - d_1^+ = 5 \\
&G_2 : \qquad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 2 \\
&G_3 : 0{,}5x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\
&x \in X = \{0 \le x_1 \le 6; 0 \le x_2 \le 5; x_1 + x_2 \le 9\}
\end{aligned}
$$

Solución: D*=1,5

$$x_1 = 5, x_2 = 4, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = 0, d_2^+ = 2; d_3^- = 1,5, d_3^+ = 0.$$

Modelo 4:

Solución: z*=6,5

X_1=5, X_2=4

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z = 0{,}5x_1 + x_2 \\
&sa \\
&G_1 : x_1 \qquad \ge 5 \\
&G_2 : \quad x_2 \quad \ge 2 \\
&x \in X = \{0 \le x_1 \le 6; 0 \le x_2 \le 5; x_1 + x_2 \le 9\}
\end{aligned}
$$

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- Estos resultados parecen conducirnos a la conclusión de que si en un modelo de PPM ponderadas todas las metas excepto una pertenecen a un subconjunto alcanzable, entonces la solución óptima de dicho modelo coincidirá con la solución de un modelo de PL en el que la FO es la maximización de la meta no alcanzable, mientras que las otras metas se tratan como restricciones.
- Este resultado, aunque altamente probable, no es necesariamente cierto como puede verse en el contraejemplo del Modelo 5 que es una modificación del Modelo 4.
- Modelo 5: Ej 2 con la F.O. ($d_1^- + d_2^- + 3d_3^-$). La nueva solución óptima, que no coincide con la del Modelo 4, es: D*= 4 con

$$x_1 = 4, x_2 = 5, d_1^- = 1, d_1^+ = 0, d_2^- = 0, d_2^+ = 3, d_3^- = 1, d_3^+ = 0.$$

FUNCIÓN DE LOGROS

- No confundir metas **jerarquizadas** con **ponderadas**. Una formulación incorrecta de la **función de logro**, como es la suma ponderada de las metas de las diferentes prioridades, supone modelizaciones equivocadas que pueden conducir a conclusiones erróneas. Aunque pueda suponerse que un modelo jerarquizado se puede resolver, aplicando el simplex, como uno ponderado con valores muy dispares para las prioridades, eso no es cierto (Ejercicio 3).

EJERCICIO 3. Estructura de la función de logro

$$Lex \quad \min a = \left[\left(d_1^-\right),\left(d_2^+\right),\left(d_3^+\right)\right]$$

$$sa$$

$$G_1: 4x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 60$$

$$G_2: 100x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 12$$

$$G_3: 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1$$

$$x \in X = \{5 \le x_1; x_1 + x_2 \le 24\}$$

Solución: a* = [0,1200,35]

$$x_1 = 12, x_2 = 12, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = 0, d_2^+ = 1200; d_3^- = 0, d_3^+ = 35.$$

- Si se reemplaza la FO por Min $100d_1^- + 10d_2^+ + d_3^+$, la nueva solución es:

$$x_1 = 5, x_2 = 19, d_1^- = 21, d_1^+ = d_2^- = 0; d_2^+ = 507; d_3^- = 0, d_3^+ = 28.$$

con el siguiente vector de logros a*=[21, 507, 28].

- Esta última solución está dominada por la del modelo lexicográfico.
- Hubiera sido necesario incrementar el coeficiente de la primera meta de 100 a 331 para conseguir una equivalencia en las soluciones.

ESTRUCTURA LÓGICA DE LAS METAS

- En principio se suelen incluir en la FO las dos desviaciones asociadas a cada meta. No resulta infrecuente omitir una de las variables desviación en la formulación de las metas, incluyendo sólo la variable desviación que se va a minimizar.
- La omisión de una de las variables desviación puede no tener influencia alguna en el valor de la solución óptima, esto es, la variable desviación puede ser **redundante.** Sin embargo, la omisión innecesaria de una variable de desviación puede conducir a la generación de soluciones subóptimas, tal como se ilustra en el **Ejercicio 4**.

EJERCICIO 4. Estructura de las metas

$$Lex \quad \min a = \left[\left(d_1^+ \right), \left(d_2^- + 2d_3^- \right) \right]$$

$$sa$$

$$G1: x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 25$$

$$G2: 4x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$G3: x_1 + d_3^- - d_3^+ = 30$$

$$x \in X = \{ x_1 + x_2 \le 35 \}$$

Solución: a* = [0,0]

$$x_1 = 30, x_2 = 5, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = 0, d_2^+ = 25; d_3^- = 0, d_3^+ = 35.$$

ESTRUCTURA LÓGICA DE LAS METAS

- Si reformulamos el modelo omitiendo en las restricciones de metas las variables desviación que no aparecen en la función de logro nos queda el **modelo 7**.
- En resumen, la omisión de variables desviación, aparentemente innecesarias, puede llevar a soluciones inferiores o no eficientes. En la práctica, es difícil saber de antemano qué variables desviación son redundantes, por lo que se **recomienda** incluir ambas variables desviación en la formulación de las metas.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- Si reformulamos el modelo omitiendo en las restricciones de metas las variables desviación que no aparecen en la función de logro nos queda el **modelo 7**:

$$
\begin{aligned}
&Lex \quad \min a = \left[\left(d_1^+\right), \left(d_2^- + 2d_3^-\right)\right] \\
&sa \\
&\quad G1: x_1 - x_2 - d_1^+ = 25 \\
&\quad G2: 4x_1 + x_2 + d_2^- = 100 \\
&\quad G3: x_1 + d_3^- = 30 \\
&x \in X = \{x_1 + x_2 \le 35\}
\end{aligned}
$$

- cuya solución, con el siguiente vector de logros a*=[0,10], es: $x_1 = 25, x_2 = 0, d_1^+ = d_2^- = 0; d_3^- = 5.$

METAS DOS LADOS INNECESARIAS

- Se ha dicho que la inclusión en la FO (metas ponderadas) o en la función de logro (metas lexicográficas) de las dos desviaciones debe realizarse cuando se desea alcanzar la meta con **exactitud** (metas con dos lados). Las metas con dos lados son menos usuales en los procesos de decisión reales que las metas con un lado. En efecto, el centro decisor no desea falta de logros (minimizar la variable desviación negativa), ni exceso de logros (minimizar la desviación positiva), pero no ambas a la vez.
- Pese a estas consideraciones, no es infrecuente encontrar en la literatura modelos con ambas desviaciones en la FO, con independencia de la actitud del centro decisor hacia la satisfacción de metas. Este tipo de modelización no es correcto desde un punto de vista conceptual, y puede conducir a soluciones subóptimas (ejemplo 5).

EJECICIO 5a. Inclusión de metas con dos lados

$$Lex \quad \min a = \left[\left(d_1^- + d_1^+ \right), \left(d_2^- \right), \left(d_3^- \right) \right]$$

$$sa$$

$$G1: x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$

$$G2: x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 3$$

$$G3: 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 6$$

$$x \in X = \{ x_1 + x_2 \leq 35 \}$$

Solución: a* = [0,0,0]

$$x_1 = 2, x_2 = 2, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_3^+ = d_3^- = 0, d_2^+ = 1.$$

EJERCICIO 5b. Inclusión de metas con dos lados

$$
\begin{aligned}
&Lex \quad min\, a = \left[\left(d_1^- + d_1^+\right), \left(d_2^- + d_2^+\right), \left(d_3^- + d_3^+\right)\right] \\
&sa \\
&\quad g1: x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
&\quad g2: x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 3 \\
&\quad g3: 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 6 \\
&x \in X = \{x_1 + x_2 \leq 35\}
\end{aligned}
$$

Solución: a* = [0,0,15]

$$x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 1{,}5,\ d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_2^+ = d_3^+ = 0,\ d_3^- = 1{,}5.$$

FUNCIÓN DE UTILIDAD. PREFER. LEXICOGRÁFICAS

- Una de la **crítica** más fuerte del enfoque lexicográfico en PPM se basa en la incompatibilidad existente entre las reglas lexicográficas y la **existencia de una función utilidad**. En otras palabras, un modelo de reglas lexicográficas no optimiza ninguna función de utilidad del centro decisor (Debreu, 1959, pp 72-73).
- Se puede ver (Romero, 1993) que las ordenaciones lexicográficas para ciertas situaciones problema pueden constituir un procedimiento lógico y empíricamente lícito de reflejar la estructura de preferencias del centro decisor.
- Para poder aceptar la existencia de una función de utilidad es necesario aceptar los siguientes supuestos (Varian, 1984, 111-113)

- *Comparabilidad*, *Reflexibilidad*, *Transitividad* y *Continuidad* son las propiedades que deben verificar las elecciones para que exista función utilidad. Parece lógico preguntarse cuáles son las condiciones que no cumplen las ordenaciones lexicográficas, así como las razones empíricas que producen dicha violación de las condiciones básicas.
- Las ordenaciones lexicográficas implican conjuntos de indiferencia formados por un sólo punto. Las superficies de indiferencia que subyacen a las ordenaciones lexicográficas no son continuas, pues están formadas por un sólo punto (una ordenación lexicográfica no es compatible con la existencia de una función utilidad).
- La violación del supuesto de continuidad es la razón lógica que explica este hecho.

INEFICIENCIA PARETIANA

- Puede decirse que la **eficiencia paretiana** es una condición necesaria para garantizar la **racionalidad** de las soluciones generadas por las diferentes TDMC (condición que deba satisfacer una solución). Aunque los modelos PPM pueden generar soluciones dominadas, éste es parece un serio inconveniente. La PPM no se diseño para obtener soluciones eficientes sino soluciones satisfactorias.
- Para poder comprobar la eficiencia se aplica el siguiente **test** que aplicaremos a un **Ejercicio 6**. Es interesante notar que la solución proporcionada por un modelo de PPM será **no eficiente** sólo si el programa lineal resuelto en el caso de un modelo basado en PPM ponderadas o el último modelo de PL de la secuencia correspondiente a un modelo lexicográfico presenten **óptimos alternativos**.

EJERCICIO 6. Eficiencia paretiana

$$\min \quad D = d_1^- + d_2^- + d_3^-$$

$$sa$$

$$g1: x_1 \qquad + d_1^- - d_1^+ = 5$$

$$g2: \qquad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 2$$

$$g3: 0{,}9x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8$$

$$x \in X = \{0 \le x_1 \le 6; 0 \le x_2 \le 5; x_1 + x_2 \le 9\}$$

Solución Z* (D*=0), que está dominada por la Z1(5,4) y Z2(5,5;3,5)

$$x_1 = 5, x_2 = 3{,}5, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_3^- = d_3^+ = 0, d_2^+ = 1{,}5.$$

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- La presencia de óptimos alternativos es una condición necesaria para garantizar la no eficiencia de la solución de un modelo PPM. Comprobada la existencia de óptimos alternativos, el paso siguiente es aplicar el **test de eficiencia**, que consiste en **maximizar** las variables **desviaciones opuestas** preservando el valor mínimo alcanzado hasta ese momento por las variables desviación no deseadas.
- **Si la solución obtenida no cambia respecto a la inicial es eficiente**, si por el contrario cambia, la nueva solución domina a la anterior (ver ejercicio 7).
- Este test de eficiencia se puede interpretar como un **proceso de optimización lexicográfico**. Así para un modelo de PPM ponderadas, la correspondiente estructura lexicográfica tienen una función de logro con dos componentes.

EJERCICIO 7. Eficiencia paretiana

$$\max \; d_1^+ + d_2^+ + d_3^+$$

$$sa$$

$$g1: x_1 \quad - d_1^+ = 5$$

$$g2: \quad x_2 - d_2^+ = 2$$

$$g3: 0{,}9x_1 + x_2 - d_3^+ = 8$$

$$x \in X = \{0 \le x_1 \le 6; 0 \le x_2 \le 5; x_1 + x_2 \le 9\}$$

Solución de este modelo domina a la anterior (Ej 6)

$$x_1 = 5, x_2 = 4, d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_3^- = 0, d_2^+ = 1{,}5, d_3^+ = 0{,}5.$$

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- La primera componente incluye las variables desviaciones, mientras que la segunda, las opuestas multiplicadas por -1.
- Si el problema secuencial no tiene óptimos alternativos, el proceso de optimización se detiene. Cuando el test de eficiencia se aplica a un modelo lexicográfico, la correspondiente función de logro debe ampliarse con una componente adicional que incluya las variables desviación opuestas.
- **Procedimiento de Hannan**. En muchos casos un modelo de PPM posee más de una solución eficiente, en tal caso puede resultar interesante (Hannan, 1980) **generar un subconjunto de soluciones eficientes** que domine a la solución inicial (no óptima) del modelo de PPM que estemos considerando.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- Si todas las metas están acotadas, se puede obtener una solución eficiente resolviendo un problema auxiliar multiobjetivo, donde sus objetivos se correspondan con las metas de nuestro modelo original. Cuando el centro decisor desea alcanzar al menos el nivel de aspiración, entonces el objetivo se maximiza; por el contrario, si el centro decisor desea no sobrepasar el nivel de aspiración, entonces el objetivo correspondiente se minimiza.
- El conjunto alcanzable del modelo de programación multiobjetivo está formado por las restricciones del modelo de PPM, ampliado por un subconjunto de restricciones que garantiza que el logro de las metas es, al menos, tan bueno como el que se consiguió cuando se resolvió el modelo de PPM. La aplicación de las ideas de Hannan a nuestro ejemplo conduce a (modelo 8):

MARCO GENERAL PARA LOS PPM

- **Paso 1:** Resolver el PPM ponderado o lexicográfico. Caso de **no existir** óptimos alternativos la solución generada es eficiente. Si existen óptimos alternativos, ir al paso 2.
- **Paso 2: a´)** Si se está interesado en **una sola** solución óptima y eficiente ir al paso 3. **b´)** Si se está interesado en explorar **un conjunto** de soluciones óptimas y eficientes ir al paso 4.
- **Paso 3:** Maximizar la suma de las variables desviación opuestas sin que se incremente (empeoren) los valores previamente obtenidos de las variables desviación. La solución obtenida en el paso 1 del algoritmo es eficiente sólo si coincide con la solución obtenida en el paso 3.
- **Paso 4:** Transformar el modelo basado en metas en un modelo de programación multiobjetivo utilizando el procedimiento de Hannan (se determina un conjunto de soluciones eficientes del PPM (ejercicio 8).

METAS REDUNDANTES

- **Ejercicio 9**: Resolviendo por el método secuencial se ve que las dos primeras prioridades se alcanzan pero la tercera no. En este caso hay un punto (la intersección de las dos primeras restricciones) en el que se minimiza la distancia a g3. Las metas 4 y 5 son redundantes, y su omisión no influye en la solución óptima del modelo. Si el nivel de aspiración de la P1 se hubiera rebajado por debajo de 3336, existirían óptimos múltiples al resolver la 3 y ya no serían redundantes la 4 y al 5.
- Por otra parte parece razonable pensar que la inclusión de metas por los dos lados aumente la probabilidad de que la meta en cuestión sea redundante. Así si en la g2 y g3 se incluyeran las dos desviaciones en la función logro, las metas de g1, g4 y g5 serían redundantes.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

- Destacar que aunque la no existencia de óptimos alternativos implica la redundancia de las metas situadas en las prioridades más bajas, **el opuesto no es cierto**. La existencia de óptimos alternativos no constituyen una condición suficiente que garantice la redundancia de las metas (ver el modelo 10). Ahora g1 es redundante y hay óptimos alternativos al resolver las prioridades del tercer nivel.
- Las metas redundantes no tienen que ser siempre aquellas que corresponden a las prioridades más bajas. Así, si el nivel de aspiración de la meta g1 se reduce a 3336, resulta fácil comprobar que la meta g2, situada en la primera prioridad pasa a ser redundante.
- Pueden apuntarse tres aspectos como causas principales de existencia de metas redundantes en los modelos lexicográficos.

3.3. PUNTOS CRÍTICOS PPM

1. una excesiva priorización de las metas (agrupación de las metas en un número excesivamente elevado de niveles de prioridad).

2. fijar niveles de aspiración muy próximos al ideal.

3. la inclusión de muchas metas con dos colas.

- Para paliar, o evitar en parte, el problemas de las metas redundantes se recomienda:

  a) utilizar algoritmos secuenciales en los que se indiqué en qué nivel ha parado el procedimiento; **b**) buscar la causa de la redundancia, intentando mejorar la formulación del modelo; **c**) si hay un excesivo número de niveles de prioridad conviene agruparlos (la agrupación de metas no redundantes no afecta a las redundantes).

- **Referencias:**

ROMERO, C. (1993): Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones. Alianza Universidad Textos.

STEUER, R. (1986): Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. Krieger.

EJEMPLO 3: PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN (PPM)

Una empresa fabrica dos tipos de piezas A y B. Cada una de ellas requiere para su fabricación las cantidades de materia prima M1 y M2 que se indican en la siguiente tabla:

Materia Prima\ Piezas	A	B	Disponibilidad
M1	2	1	200
M2	4	3	450
Beneficio	5	3	

La empresa desea saber cuál es el número de piezas que debe fabricar para cada tipo si se fijan las siguientes metas con prioridades jerarquizadas (P1>>P2>>P3):

P1: Obtener un beneficio no inferior a 450 u.m.

P2: Fabricar al menos 120 piezas

P3: Fabricar el mayor número de piezas posible de B

Calcular:

1. La solución del problema anterior mediante el Método Gráfico
2. La solución mediante el Método Secuencial (Solver)
3. La solución mediante el Método Multifase (QSB)

EJEMPLO 4: TRANSPORTE MULTICRTERIO

Sea el problema de transporte correspondientes a la primera tabla (cij). Se quiere determinar su política de transporte de forma que simultáneamente reduzca el coste total, los desperfectos y la emisión de gases, siendo los desperfectos (d_{ij}) y los gases emitidos (e_{ij}) por unidad los dados en las siguientes tablas:

c_{ij}	D1	D2	D3	Oferta
O1	20	18	25	24
O2	12	11	33	6
O3	17	17	44	11
Dem.	15	10	10	

d_{ij}	D1	D2	D3
O1	6	6	10
O2	4	3	14
O3	5	8	16

e_{ij}	D1	D2	D3
O1	2	6	4
O2	8	2	5
O3	6	10	9

Determinar la política de transporte óptima mediante PPC según las normas p=1, 2,∞, sabiendo que los desperfectos por unidad que permanece en el almacén son 2.

EJEMPLO 4

- Modelización:
  - Sean x_{ij} el número de unidades que van del origen i (O_i) al destino j (D_j) con i=1,...,m; j=1,...,n siendo ene este caso n=m=3.
  - El Objetivo (z) es minimizar el coste total ($z = 20x_{11} + 18x_{12} + 25x_{13} + 12x_{21} + 11x_{22} + 33x_{23} + 17x_{31} + 17x_{32} + 44x_{33}$)
  - Las restricciones corresponden a los recursos utilizados

    [Orígenes, i=1,...,m]

    (Sale del origen i ≤ cant. almacenada en i)

    $x_{i1} + x_{i2} + x_{13} \leq a_i$ con $a_1=24$, $a_2=6$ y $a_3=11$.

    [Destinos, j=1,...,n]

    (Llega al destino j ≥ demandada en j)

    $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} \geq b_j$ con $b_1=15$, $b_2=10$ y $b_3=10$.
  - No negatividad son $x_{ij} \geq 0$

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a.\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$$

EJEMPLO 4

- Resolución problema de transporte:

cij	D1	D2	D3	DFicticio	Oferta
O1	20	18	25	0	24
O2	12	11	33	0	6
O3	17	17	44	0	11
Demanda	15	10	10	6	41

Objetivo	z=	651

xij	D1	D2	D3	DFicticio	Envíos
O1	0	8	10	6	24
O2	4	2	0	0	6
O3	11	0	0	0	11
Llegadas	15	10	10	6	

EJEMPLO 4

- Modelización:

$$Min \quad d(z,z^*,p)=\left[\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{z_j^*-z_j(x)}{z_j^*-z_j^0}\right|^p\right]^{1/p}$$

$$z_1(x)=\sum_{i,j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$

$$z_2(x)=\sum_{i,j=1}^{3}d_{ij}x_{ij}$$

$$z_3(x)=\sum_{i,j=1}^{3}e_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13} &&\le 24\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23} &&\le 6\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33} &&\le 11\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31} &&\ge 15\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32} &&\ge 10\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33} &&\ge 10\\
&x_{ij}\ge 0,\quad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n;\ p=1,2
\end{aligned}$$

$$Min \quad d(z,z^*,\infty)=\max_j\left|\frac{z_j^*-z_j(x)}{z_j^*-z_j^0}\right|$$

$$z_1(x)=\sum_{i,j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$

$$z_2(x)=\sum_{i,j=1}^{3}d_{ij}x_{ij}$$

$$z_3(x)=\sum_{i,j=1}^{3}e_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13} &&\le 24\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23} &&\le 6\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33} &&\le 11\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31} &&\ge 15\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32} &&\ge 10\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33} &&\ge 10\\
&x_{ij}\ge 0,\quad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n
\end{aligned}$$

3.4. PRÁCTICAS

LINGO - [LINGO Model - EJ4_ppc1]

File Edit LINGO Window Help

```
! Problema de programación por compromiso - norma 1;

SETS:
! Importar ofertas y demandas desde Excel;
   ORIGENES / @OLE('EJ4.XLS')/: OFERTAS;
   DESTINOS / @OLE('EJ4.XLS')/: DEMANDAS;
   LINKS(ORIGENES,DESTINOS): CANTIDAD, COSTO, DANYO, EMISION;
ENDSETS

! El objectivo;
   MIN = @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * COSTO (I, J)) - OPT1)) / REC1 +
         @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * DANYO(I, J)) - OPT2)) / REC2 +
         @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * EMISION (I, J)) - OPT3)) / REC3;

! Restricciones de demanda;
   @FOR(DESTINOS(J):
    @SUM(ORIGENES(I): CANTIDAD(I,J)) >= DEMANDAS(J));

! Restricciones de capacidad;
   @FOR(ORIGENES(I):
    @SUM(DESTINOS(J): CANTIDAD(I,J)) <= OFERTAS(I));

! Valor de la función objetivo;

      FON1 = @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * COSTO (I, J)) - OPT1)) / REC1 +
             @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * DANYO(I, J)) - OPT2)) / REC2 +
             @ABS((@SUM(LINKS(I,J): CANTIDAD(I, J) * EMISION (I, J)) - OPT3)) / REC3;

DATA:
! Importar los datos desde Excel;
   OFERTAS, DEMANDAS, COSTO, DANYO, EMISION =
    @OLE( 'EJ4.XLS',
     'OFERTAS', 'DEMANDAS', 'COSTO', 'DANYO', 'EMISION');
   OPT1, OPT2, OPT3 = @OLE('EJ4.XLS', OPT1, OPT2, OPT3);
   REC1, REC2, REC3 = @OLE('EJ4.XLS', REC1, REC2, REC3);

! Exportar la solución a Excel;
    @OLE('EJ4.XLS','CANTIDADN1','FON1')
      = CANTIDAD, FON1;
ENDDATA
```

Ready | MOD | Ln 13, Col 57 | 2:17 am

EJEMPLO 4

- Resolución Ejemplo 4

S1*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	0	8	10	6	24
O2	4	2	0	0	6
O3	11	0	0	0	11
Llegadas	15	10	10	6	z1*=651

S2*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	4	4	10	6	24
O2	0	6	0	0	6
O3	11	0	0	0	11
Llegadas	15	10	10	6	z2*=233

S3*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	10	4	10	0	24
O2	0	6	0	0	6
O3	5	0	0	6	11
Llegadas	15	10	10	6	z3*=126

Tabla de óptimos individualizados

	Z1	Z2	Z3
S1	**651**	237	190
S2	655	**233**	150
S3	673	239	**126**
minimo	651	233	126
maximo	919	324	220
Recorrido	268	91	94

Normas

p=1	p=2	p=infinito
0.1480236	0.09927693	0.0851064

x_{ij}(p=1)	D1	D2	D3	D4
O1	10	4	10	0
O2	0	6	0	0
O3	5	0	0	6
		d(z,z*, 1)=		0.148

x_{ij}(p=2)	D1	D2	D3	D4
O1	9	4	10	1
O2	0	6	0	0
O3	6	0	0	5
		d(z,z*, 2)=		0.09928

x_{ij}(p=inf)	D1	D2	D3	D4
O1	8	4	10	2
O2	0	6	0	0
O3	7	0	0	4
		d(z,z*, inf)=		0.0851