DECISIÓN MULTICRITERIO

JOSÉ MARÍA MORENO JIMÉNEZ

moreno@unizar.es

<http://gdmz.unizar.es>
Facultad de Económicas
Universidad de Zaragoza

2.1 Introducción (1h)

2.2 Técnicas Generadoras (1h)

2.3 Mod. satisfacción y compromiso (1 h)

2.4 Prácticas (1 h)

2.1 INTRODUCCIÓN

- Las **Técnicas de Decisión Multicriterio** (TDMC) son un grupo de herramientas que abordan la resolución de problemas complejos de una forma más realista que los enfoques tradicionales, permitiendo la incorporación de diferentes criterios y visiones de la realidad.
- Hay **muchas clasificaciones** de las TDMC. Siguiendo un criterio basado en el flujo de información entre dos de los actores participantes en el PTD (**decisor y analista**), se pueden considerar tres grande grupos de técnicas:

  a) **sin** información a priori;

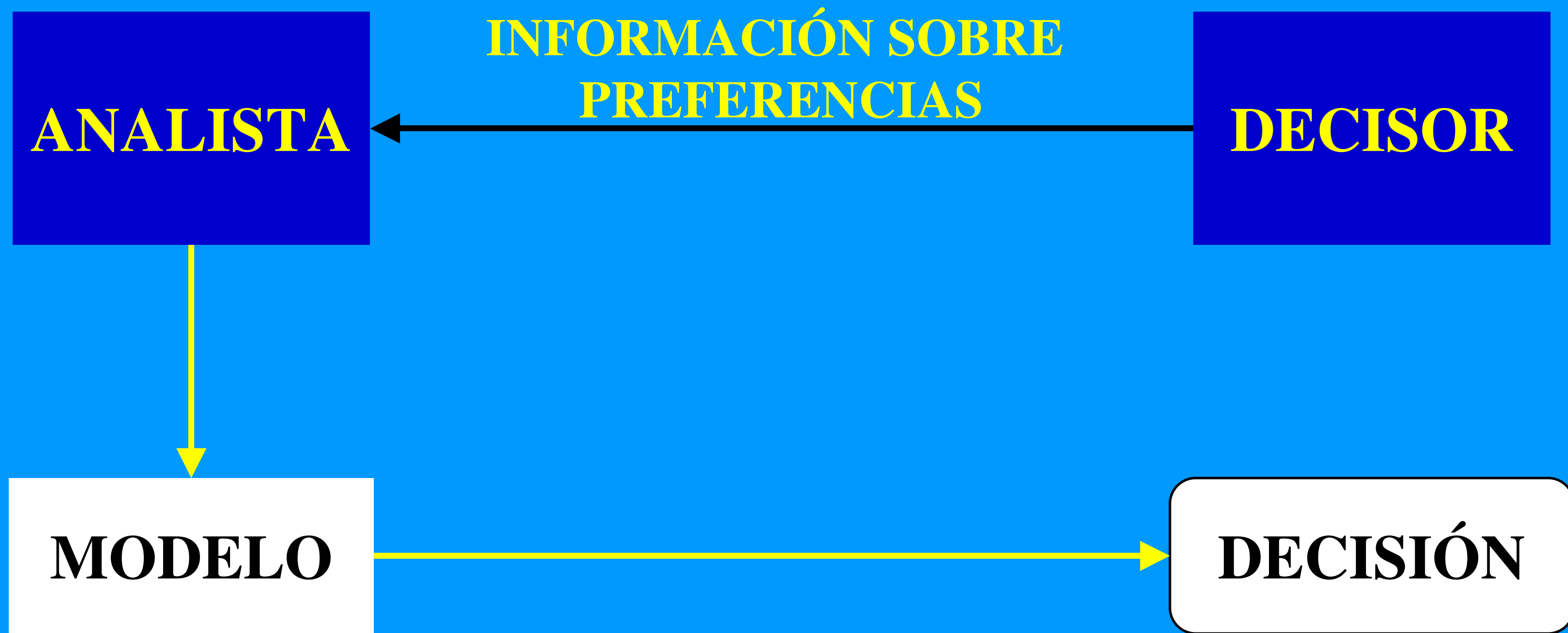
  b) con **información a priori**, y

  c) técnicas **interactivas**.
- En el segundo grupo se distinguen las técnicas existentes para un número finito e infinito de alternativas.

2.1 INTRODUCCIÓN

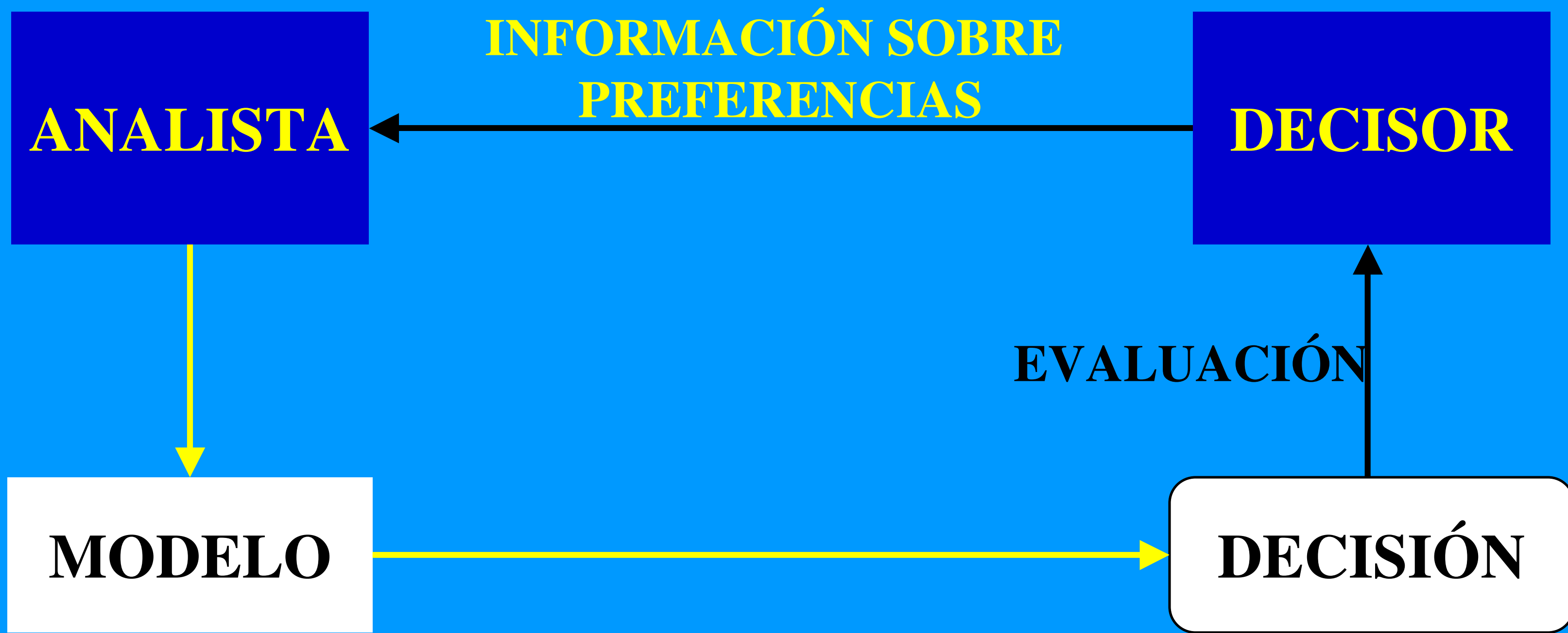
TÉCNICAS GENERADORAS

2.1 INTRODUCCIÓN



TÉCNICAS CON INFORMACIÓN A PRIORI

2.1 INTRODUCCIÓN



TÉCNICAS INTERACTIVAS

2.1 INTRODUCCIÓN

- *Técnicas sin información a priori* (generadoras):
  - Son aquellas en las que el flujo de información va del analista al decisor.
  - El analista estudia objetivamente el problema y obtiene el conjunto de alternativas eficientes que presenta al decisor. Éste elige aquella que más se adecua a su estructura de preferencias que no ha hecho explícita en ningún momento del proceso.
  - Con ellas se genera, parcial o totalmente, el conjunto de alternativas eficientes.
  - La principal ventaja de este tipo de técnicas es que la única información necesaria del decisor es su opinión de "cuanto más mejor".
  - Los inconvenientes más importantes son los asociados a su complejidad calculista en cuanto el número de criterios considerados se va elevando (prácticamente no se usan con más de tres criterios).
  - Entre las técnicas generadoras destacan (Steuer, 1986): el método de ponderaciones, el de la ε-restricción y el simplex multicriterio.

2.1 INTRODUCCIÓN

- *Técnicas con información a priori:* El flujo de información es en el sentido contrario, del decisor al analista. Estas técnicas exigen que el decisor proporcione al analista su estructura de preferencias, y éste es quién construye el modelo incluyendo en él toda esta información. La solución del problema (decisión) surge del modelo (su resolución) directamente.
- El conocimiento explícito de las preferencias del decisor no es sencillo. Se necesita: conocer la propia estructura de preferencias; no cometer errores en el proceso de extracción y de incorporación de la misma. Además el decisor suele modificar sus preferencias a lo largo del proceso de resolución, por lo que deberá establecer determinados controles para retroalimentar el modelo.

2.1 INTRODUCCIÓN

- Este grupo de técnicas se suele distinguir según el número de alternativas que tenga el problema: finito o infinito.
- Si el conjunto de alternativas es infinito, la búsqueda de la solución se efectúa, habitualmente, mediante la minimización de una distancia (programación por compromiso y programación por metas).
- Si el conjunto de alternativas es discreto se distinguen:
  - i) ***Métodos de Agregación***: En este tipo de métodos se modelizan las preferencias a través de una función valor
    - ***Directos***: Teoría de Utilidad Multiatributo (MAUT)
    - ***Jerárquicos***: Proceso Analítico Jerárquico (AHP), y SMART (Edwards, 1982)
  - ii) ***Métodos basados en relaciones de orden***: Se modelizan las preferencias a través de un sistema de relaciones binarias. Métodos de Superación (MS).

2.1 INTRODUCCIÓN

- ***Técnicas interactivas*.** El decisor proporciona al analista una información parcial sobre su estructura de preferencias al principio del proceso. Con esta información el analista presenta una alternativa al decisor que éste evalúa y puede aceptar o rechazar. Si se rechaza, da más información al analista sobre sus preferencias, de modo que pueda buscarse una alternativa más aceptable.
- El intercambio de información es la principal característica de estas técnicas. Dentro de este conjunto de métodos los más utilizados han sido: STEM y Método de Zionts-Wallenius (1976, 1983). Muchos de los métodos anteriormente mencionados pueden considerarse dentro de este último grupo, bastando para ello que el decisor revise sus juicios dentro del PTD.

Características generales

- Flujo de información: analista → decisor
- Objetivo: generar el conjunto de soluciones eficientes
- Ventajas
  - Comodidad para el analista
  - No es necesario que el decisor haga explícita su estructura de preferencias
- Inconvenientes
  - Sensibles al número de objetivos del problema
  - Dificultades en la presentación de los resultados
    - Método gráfico (sólo 2 criterios)
    - Presentación tabular
    - Caminos de valor

Conceptos y notación

S → Región de factibilidad en el ESPACIO DE LAS DECISIONES

Z → Región de factibilidad en el ESPACIO DE CRITERIOS

- Vector criterio no dominado $\overline{z} \in Z$
- Solución eficiente $\overline{x} \in S$
  - Solución eficiente punto extremo
  - Solución eficiente no punto extremo

E → Conjunto de soluciones eficientes o FRONTERA EFICIENTE $E \subset S$

2.2 TÉCNICAS GENERADORAS

Ejemplo:

- Un fabricante de productos químicos está considerando la posibilidad de producir a gran escala dos tipos de sustancias denominadas A y B.
- La producción de las dos sustancias está sujeto a restricciones debidas a disponibilidades de materia prima, tiempo de trabajo y control de calidad
- El fabricante desea maximizar el beneficio (objetivo 1) pero a la vez desea hacer mínima la cantidad de contaminación (objetivo 2) que se produce en el proceso de fabricación. Tenemos así un problema con dos objetivos que tratamos de satisfacer simultáneamente y que son total o al menos parcialmente conflictivos.

Ejemplo

Variables de decisión:

x_1= producción de la sustancia A

x_2= producción de la sustancia B

El problema se modeliza de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 + 3x_2 \text{ (beneficio)}$$

$$\text{Min } Z_2 = 4x_1 + 2x_2 \text{ (contaminación)}$$

$$\text{s.a.:} \quad x_1 + 3x_2 \leq 24 \text{ (materia prima)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18 \text{ (tiempo de trabajo)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \text{ (control de calidad)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problemas de Programación Lineal Multiobjetivo

- Problema de Programación Lineal MultiObjetivo (PPLMO)

$$
[P] \quad \text{Max } z = (z_1(x), \ldots, z_p(x)) \\
\text{s.a.} \quad Ax \leq b \\
x \geq 0
$$

- El número de criterios es p y se supone que son de máximo
- Se supone que todas las restricciones y criterios son lineales
- Se buscan soluciones eficientes

Método gráfico

- Sólo para problemas con 2 criterios
- Procedimiento para un PPLMO
  - Representar la región de factibilidad del espacio de soluciones
  - Determinar los puntos extremos y evaluarlos en los distintos criterios
  - Representar el espacio de criterios
  - Determinar la frontera eficiente
- La pendiente de los segmentos de la frontera representan las tasas de intercambio (trade-offs)

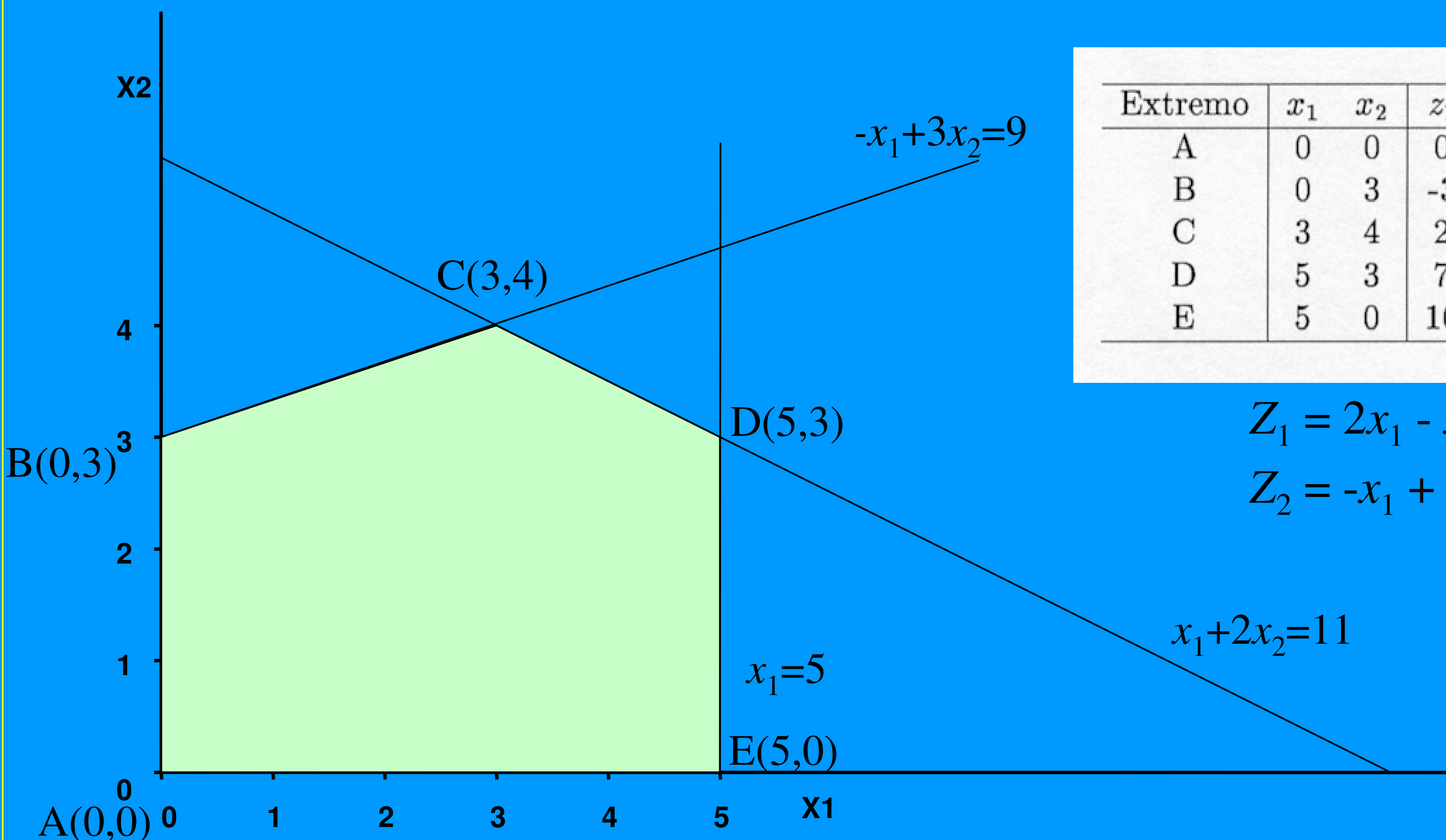
EJEMPLO 1

$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Max } Z_2 = -x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1 \quad\quad &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Método Gráfico

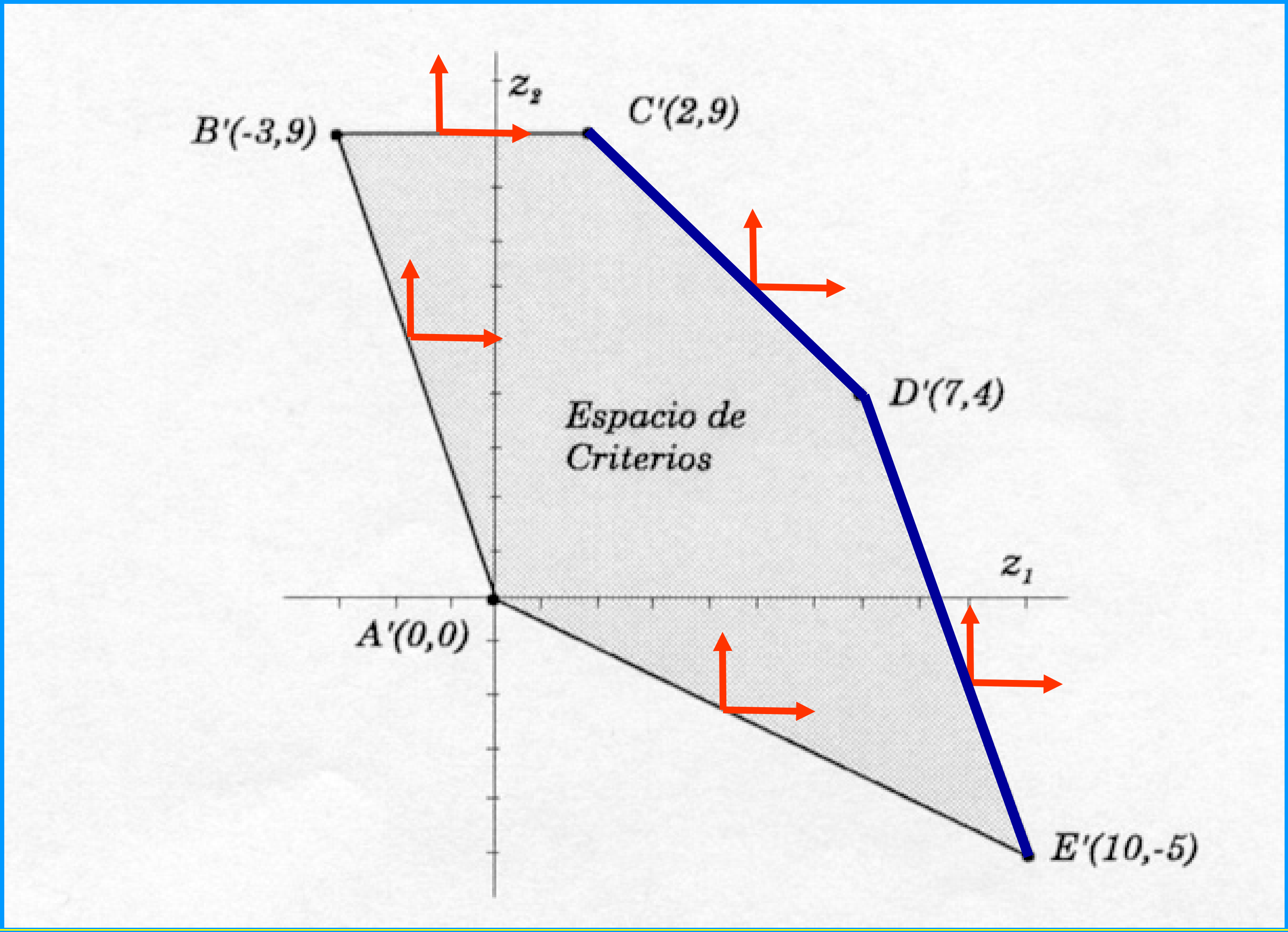


Extremo	x_1	x_2	z_1	z_2
A	0	0	0	0
B	0	3	-3	9
C	3	4	2	9
D	5	3	7	4
E	5	0	10	-5

$$Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$Z_2 = -x_1 + 3x_2$$

2.2 TÉCNICAS GENERADORAS



Método de las ponderaciones

- Modelo (Gass y Saaty, 1955; Zadeh, 1963)

$$\mathrm{P}(w) \quad \mathrm{Max} \sum_{j=1}^{p} w_j z_j(x)$$
$$\text{s.a. } Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

- Si $w_j > 0\ \forall j$, o la solución es única, la solución óptima de P(w) es solución eficiente del problema multicriterio
- Si algún $w_j = 0$ y la solución es múltiple $\Rightarrow$ no todas las soluciones tienen porqué ser eficientes

Método de las ponderaciones

- Los pesos no representan las preferencias del decisor. Juegan el papel de parámetros que se hacen variar arbitrariamente para generar soluciones eficientes del problema
- Este método sólo genera *soluciones eficientes* que sean *puntos extremos*
- No se garantiza la obtención de todos los puntos extremos eficientes
  - Escoger las ponderaciones con algún criterio sistemático, haciendo uso de la programación lineal paramétrica

Método de las ε-restricciones

- Modelo (Marglin, 1967)

$$
\begin{array}{lll}
P(\varepsilon) & \text{Max } z_j(x) & \\
& \text{s.a.} & z_k(x) \geq \varepsilon_k \quad k = 1,\ldots,p;\ k \neq j \\
& & Ax \leq b \\
& & x \geq 0
\end{array}
$$

- Si las restricciones asociadas a los objetivos son ACTIVAS (se cumplen con =), la solución de $P(\varepsilon)$ es solución eficiente del problema multicriterio
- Si alguna de las restricciones asociadas a los objetivos no es activa, y existen óptimos alternativos ⇒ no todas las soluciones tienen porqué ser eficientes

Método de las ε-restricciones

- Pueden obtenerse *soluciones eficientes* que *no* sean *puntos extremos*
- No se garantiza la obtención de todas las soluciones eficientes
  - Escoger los niveles de las restricciones con algún criterio sistemático y utilizar programación lineal paramétrica
  - Los valores ideales y antiideales son una orientación para la selección de estos niveles de las restricciones

Métodos mixtos

- Es una mixtura entre el método de ponderaciones y el de restricciones
- Modelo

$$
\begin{aligned}
\text{Max } & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j z_j(x) \\
\text{s.a. } & z_l(x) \geq \varepsilon_l \quad l = k+1,\ldots,p \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Restricciones fuertes: $Ax \leq b$; $x \geq 0$
- Restricciones débiles: $z_l(x) \geq \varepsilon_l$

2.2 TÉCNICAS GENERADORAS

Método del Simplex Multicriterio

- Es una *extensión* del método *simplex*
- Se obtiene una **generación exhaustiva** de todas las **soluciones eficientes** que son puntos extremos
- El MSM trabaja con todos los criterios simultáneamente sin reducirlos a una función global y única como hacen el resto de técnicas generadoras
- El MSM investiga los puntos extremos del espacio de soluciones, determinando la eficiencia o no eficiencia de los mismos

APROXIMACIONES

- Consideración simultánea de los criterios (conjunto de soluciones eficientes).
- Utilizar otras aproximaciones (Búsqueda de Metas):
  - Modelos de Satisfacción
  - Modelos de Compromiso
- Utilización de una función valor/utilidad que permite transformar el problema multicriterio en uno unicriterio.

- **Modelos de Satisfacción**: Sea el PPMC

$$
\begin{aligned}
&Opt\ z(x) = (z_1(x),\ldots, z_q(x)) \\
&x \in X = \left\{x \in R^n, g(x) \le 0\right\} \\
&g = (g_1,\ldots, g_m)
\end{aligned}
$$

- Considerando una serie de **r metas**, j=1,…,r, que vienen determinadas, respectivamente, por **Jj condiciones ($G_{j_k}(z) \geq 0$, k=1,.., J_j)**. El conjunto de soluciones satisfactorias para cada una de estas metas, S_j, viene dado por: $S_j = \left\{z \in Z \middle| G_{j_k}(z) \ge 0\right\} j = 1,.., r; k = 1,\ldots, J_j$

2.3 SATISFACCIÓN Y COMPROMISO

- **Teorema 1**: Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r$

$$S \;\mathrm{I}\; Z \neq \phi \Leftrightarrow \exists j \ni S_j \;\mathrm{I}\; Z \neq \phi$$

- **Teorema 2**: $S_j \cap Z \neq \phi \Leftrightarrow v_j = 0$

siendo v_j la solución del modelo

$$v_j = min \sum_{k=1}^{J_j} d_k$$

$$G_{j_k}(z(x)) + d_k \geq 0 \; k = 1, \ldots, J_j$$

$$x \in X, d_k \geq 0$$

- Ejemplo 1b: $j=1,2,3$ $(r=3)$, $J_1=1$, $J_2=1$, $J_3=1$

$S_1=\{z(x) | z_1(x) \geq 9\}$

$S_2=\{z(x) | z_2(x) \geq 9\}$

$S_3=\{z(x) | z_1(x) + z_2(x) \geq 15\}$

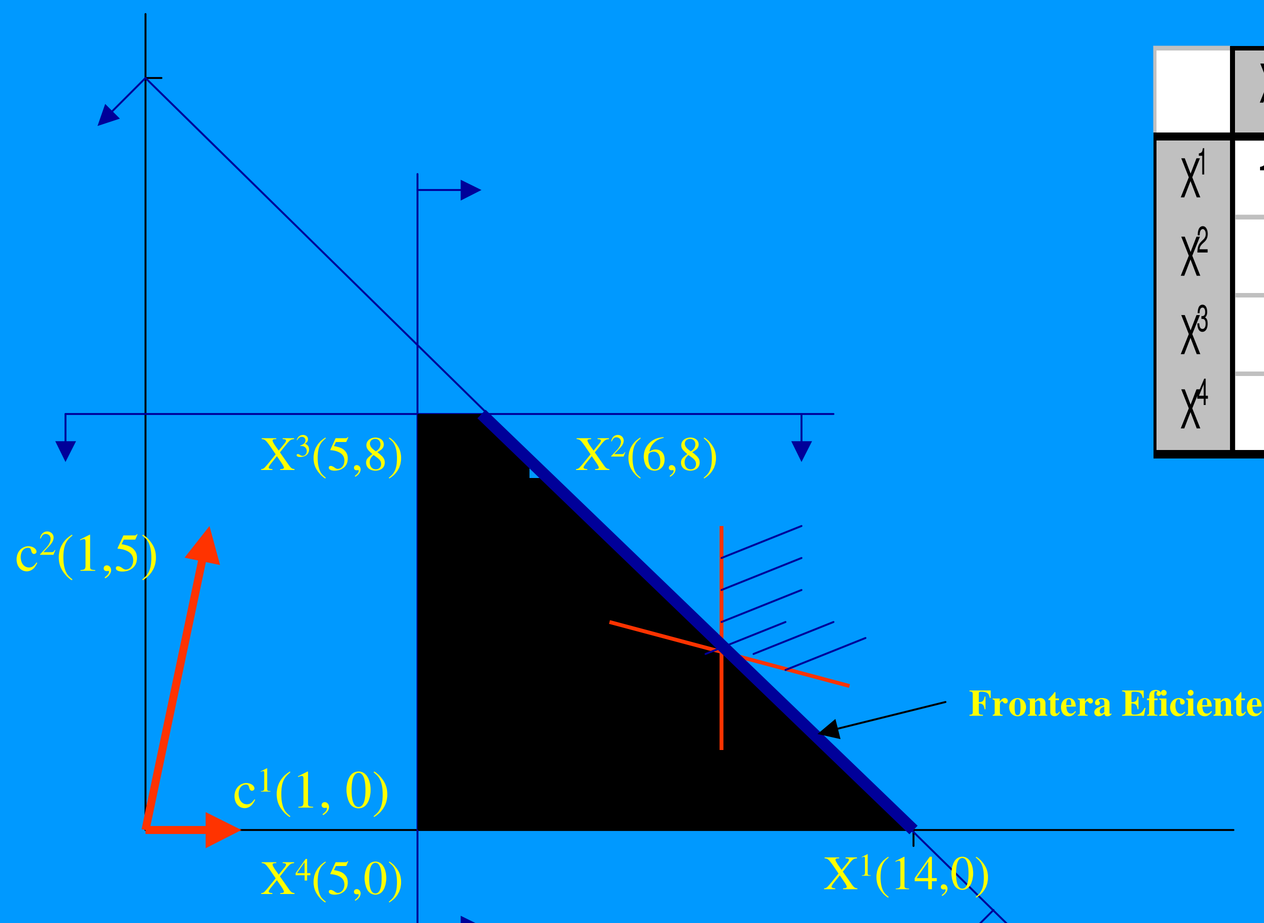
- Ejemplo 2: $j=1$ $(r=1)$, $J_1=2$

$S_1=\{z(x) | z_1(x)\geq 145, z_2(x)\geq 50\}$

ESP. SOL.					ESP. CRIT.
PUNTOS (X)	x_1	x_2	z_1	z_2	PUNTOS (Z)
X^1	14	0	140	14	Z^1
X^2	6	8	60	46	Z^2
X^3	5	8	50	45	Z^3
X^4	5	0	50	5	Z^4

$$Max\ z_1(x) = 10x_1$$
$$Max\ z_2(x) = x_1 + 5x_2$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 14$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 5$$
$$g_3(x) = x_2 \leq 8$$
$$z_1(x) = 10x_1 \geq 145$$
$$z_2(x) = x_1 + 5x_2 \geq 50$$

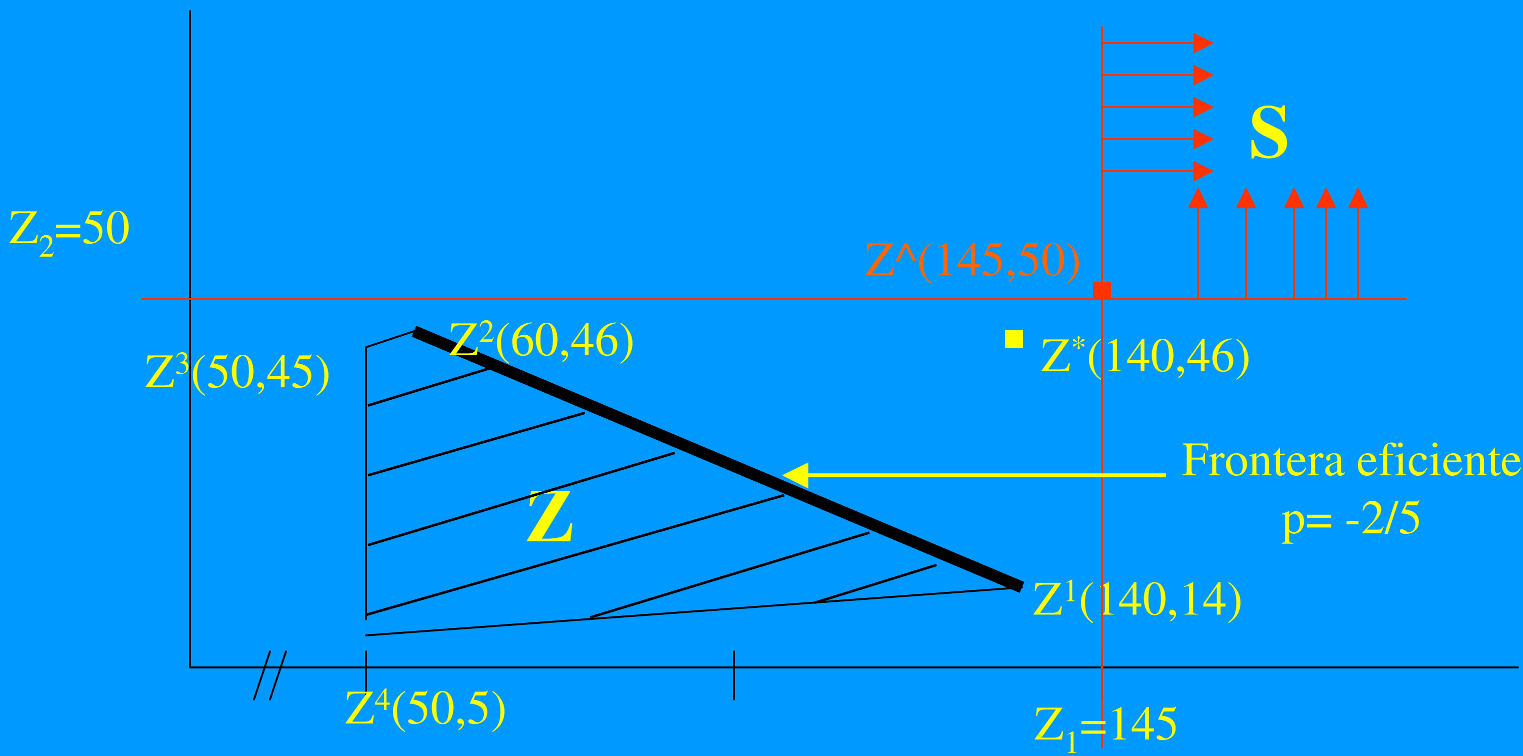
EJEMPLO 2



ESPACIO DE SOLUCIONES

	X_1	X_2	Z_1	Z_2	
X^1	14	0	**140**	14	Z^1
X^2	6	8	60	**46**	Z^2
X^3	5	8	50	45	Z^3
X^4	5	0	50	5	Z^4

EJEMPLO 2



ESPACIO DE CRITERIOS

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO

- Sea $z^*=(z_1^*, z_2^*,\ldots, z_q^*)$ el punto ideal, con $z_j^* = \max_{x\in X} z_j(x)$, la distancia o pesar entre cualquier $z\in Z$ y el punto ideal z^* viene dada por:

$$d(z,z^*,p)=r(z,z^*)=\left[\sum_{j=1}^{q}\left(z_j^*-z_j(x)\right)^p\right]^{1/p},\ 1\le p<\infty$$

$$d(z,z^*,\infty)=\max_j \left|z_j^*-z_j(x)\right|,\quad j=1,\ldots,q$$

- En la expresión anterior los criterios no han sido normalizados ni ponderados. Para ello se introducen unos pesos ω_j que suelen venir dados como $\omega_j=\lambda_j\delta_j$. Las expresiones anteriores quedan:

$$d(z,z^*,w,p)=r(z,z^*,w)=\left[\sum_{j=1}^{q}w_j^p\left(z_j^*-z_j(x)\right)^p\right]^{1/p},\ 1\le p<\infty$$

$$d(z,z^*,w,\infty)=\max_j w_j\left|z_j^*-z_j(x)\right|,\quad j=1,\ldots,q$$

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO

- En la expresión general de la PPC los coeficientes λ_j y δ_j representan, respectivamente, la parte subjetiva y objetiva de la importancia de las diferencias. λ_j es la importancia relativa dada a las desviaciones (cada criterio) y δ_j el factor de normalización:

$$\delta_j = 1/\ z_j^*; \qquad \delta_j = 1/\ z_j^* - z_j^0; \ \ldots$$

- La solución del problema (PPC) se obtiene como el punto z^p (espacio de criterios) o x^p (espacio de soluciones) que minimizan, respectivamente:

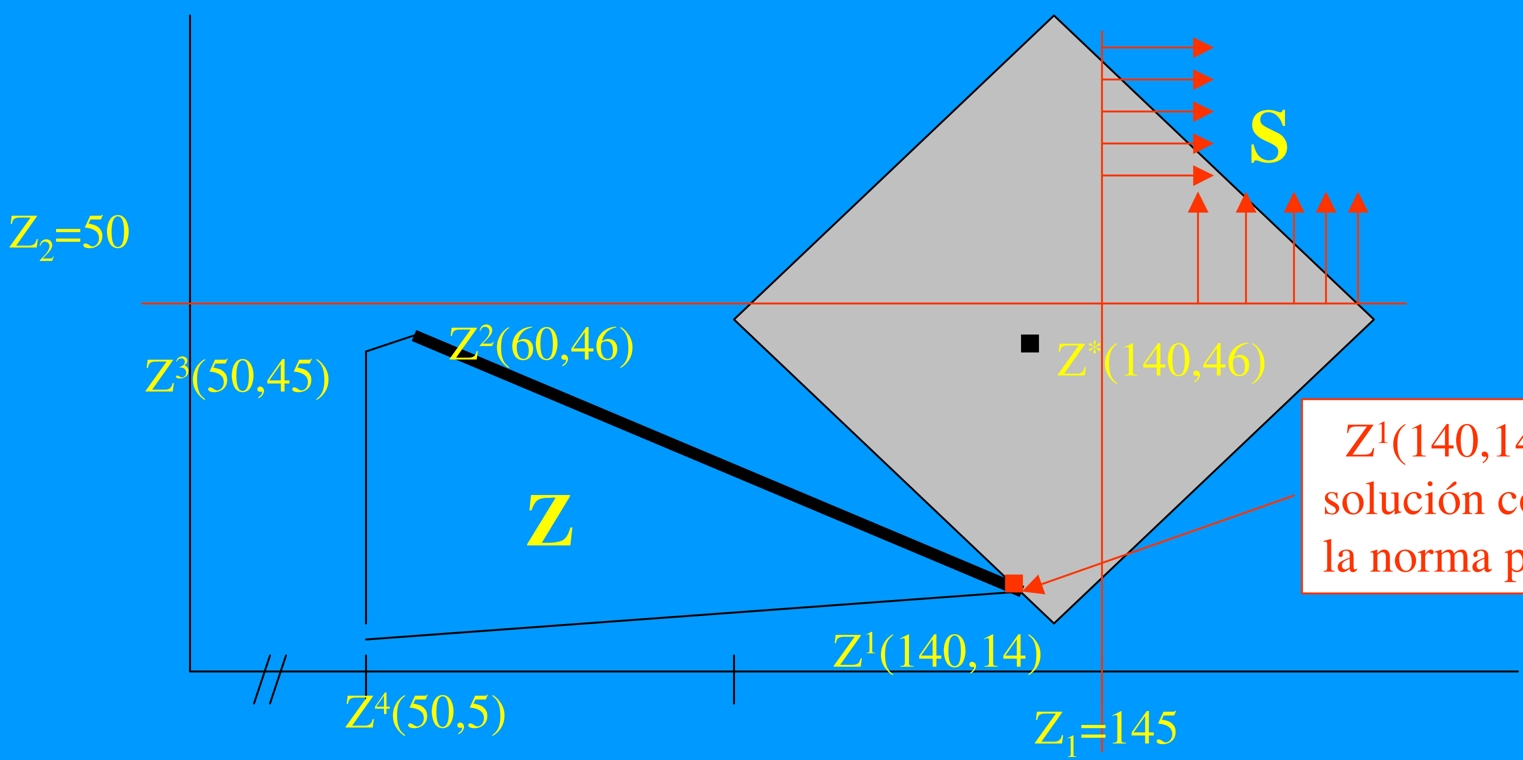
$$\underset{z \in Z}{Min} \quad r(z, z^*, p) = r(z^p, z^*, p)$$

$$\underset{x \in X}{Min} \quad r(z(x), z^*, p) = r(z(x^p), z^*, p)$$

2.3 SATISFACCIÓN Y COMPROMISO

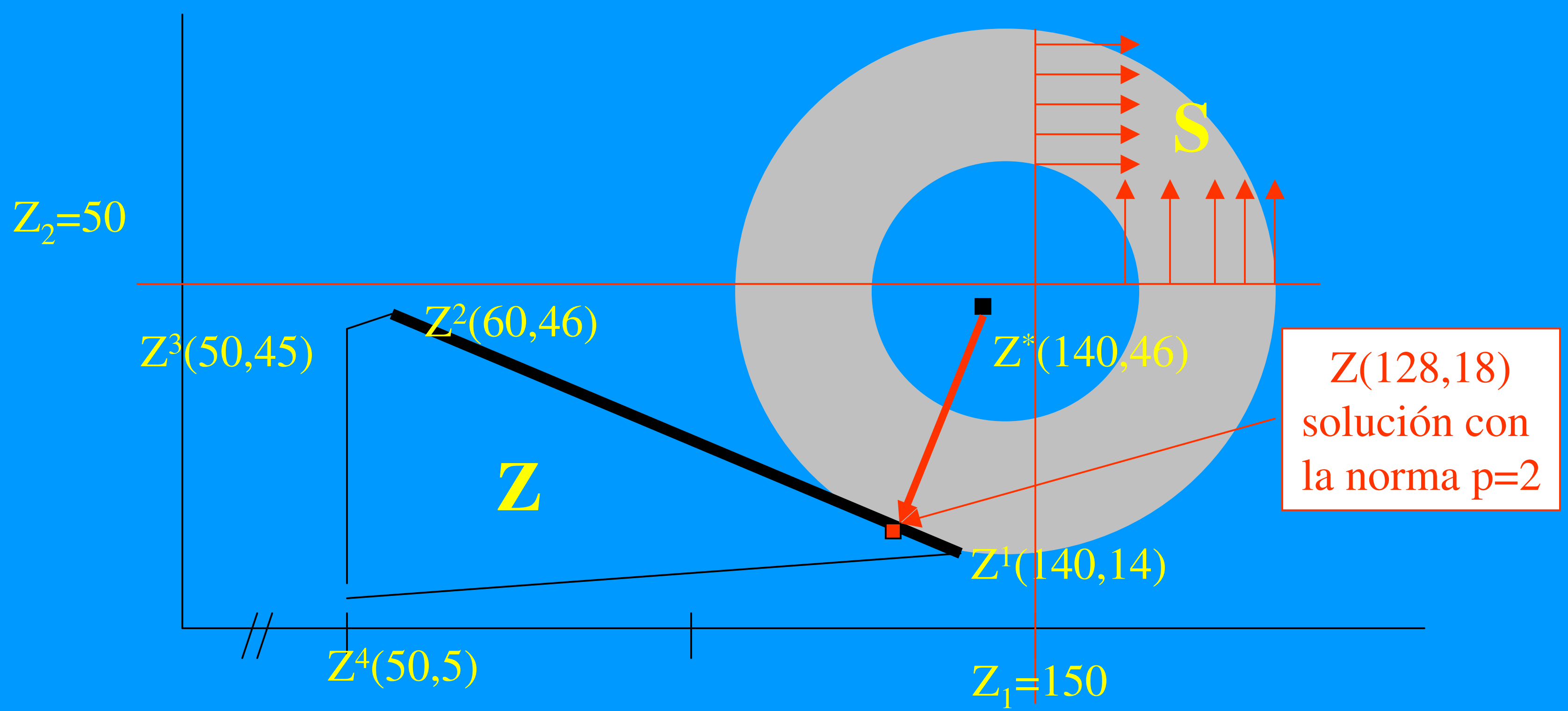
- **Propiedades:**
  - P1: Factibilidad. Las soluciones de compromiso (x^p y z^p) son factibles.
  - P2: Mínimo pesar del grupo
  - P3: No dictatorial
  - P4: Pareto Optimalidad
  - P5: Unicidad
  - P6: Simetría
  - P7: Independencia de alternativas irrelevantes.
  - P8: Continuidad
  - P9: Monotonía en general
  - P10: Acotación
  - P11: Monotonía en dos criterios

EJEMPLO 2



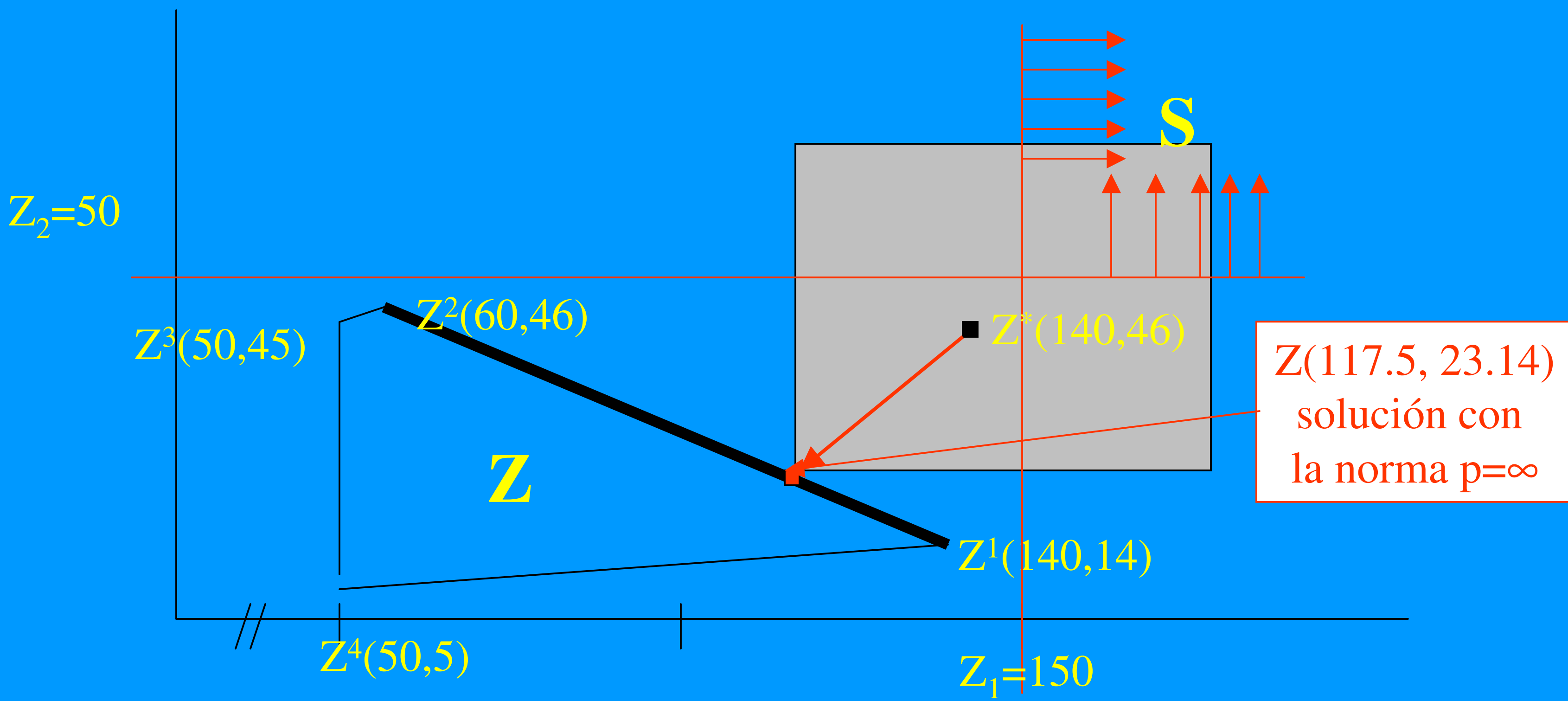
ESPACIO DE CRITERIOS

EJEMPLO 2



ESPACIO DE CRITERIOS

EJEMPLO 2



ESPACIO DE CRITERIOS

2.4 PRÁCTICAS

EJEMPLO 1: TÉCNICAS GENERADORAS

Considerar el siguiente problema de Programación Lineal Multiobjetivo:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z1 = 2X1 - X2 \\
&\text{Max } Z2 = -X1 + 3X2 \\
&\text{s.a.: } X1 + 2X2 \le 11 \\
&\quad -X1 + 3X2 \le 9 \\
&\quad X1 \le 5 \\
&\quad X1 \ge 0,\ X2 \ge 0
\end{aligned}$$

A) Aplicar el método de las ponderaciones para obtener soluciones eficientes

B) Aplicar el método de las e- restricciones para obtener soluciones eficientes

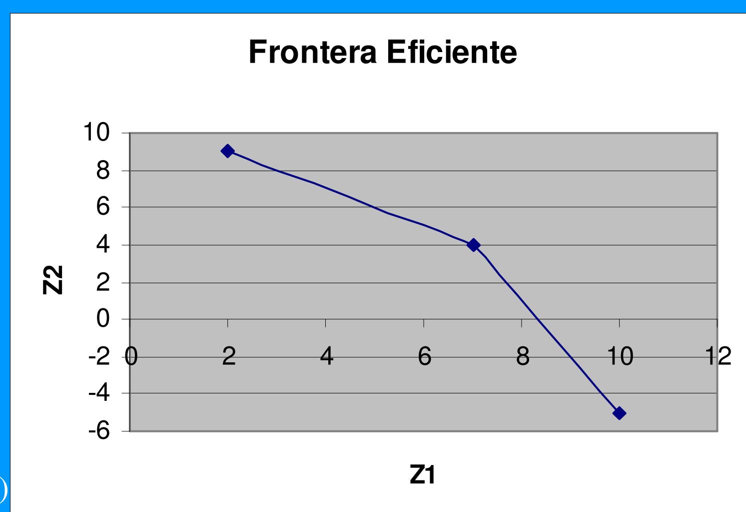
EJEMPLO 1

	X1	X2	V's Decisión	Z
Z1	2	-1	3	2
Z2	-1	3	4	9

sa

		Consumo	Rest.	Disponib.
1	2	11	<	11
-1	3	9	<	9
1	0	3	<	5

	Ponderaciones			espacio soluciones		espacio criterios		
Pendiente	$\lambda 1$	$\lambda 2$	G(x)	X1*	X2*	Z1*	Z2*	G(x)*
	1	0	2	5	0	10	-5	10
-2	2	1	13	5	3	7	4	18
-1,5	3	2	24	5	3	7	4	29
-1	1	1	11	3	4	2	9	11
-0,5	1	2	20	3	4	2	9	20

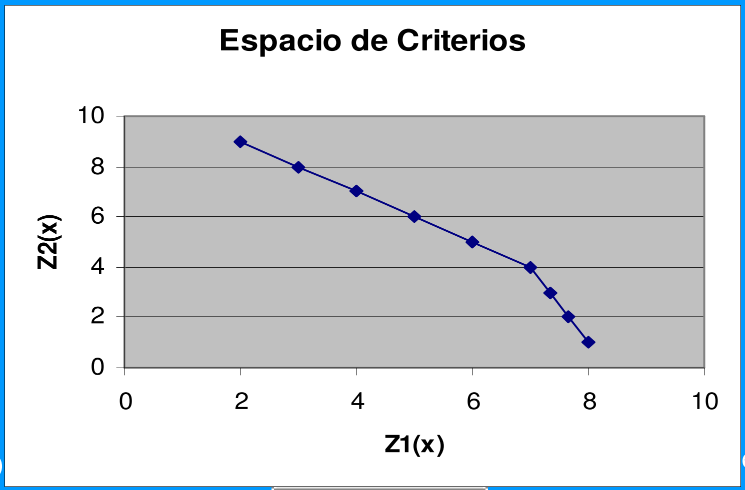


EJEMPLO 1

	X1	X2	V's Decisión		Z
Z1	2	-1	3		2
Z2	-1	3	4		9

sa			Consumo	Rest.	Disponib.
	1	2	11	<	11
	-1	3	9	<	9
	1	0	3	<	5

Z2=	X1	X2	Z1*	Z2*
1	5	2	8	1
2	5	2,33	7,67	2
3	5	2,67	7,33	3
4	5	3	7	4
5	4,6	3,2	6	5
6	4,2	3,4	5	6
7	3,8	3,6	4	7
8	3,4	3,8	3	8
9	3	4	2	9



EJEMPLO 2: PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO

Un individuo quiere ganar dinero el próximo sábado. Dispone de 14 horas para trabajo y ocio. Le gustaría trabajar al menos 5 hs. y no dedicar más de 8 hs. al ocio. Si por cada hora trabajada gana 10 u.m., y se supone que no tiene limitación en cuanto a la posibilidad de trabajar. Si además de ganar dinero, el individuo aspira a lograr cierto grado de "felicidad" o "autorrealización" en su vida, cuantifícando con 1 unidad de "bienestar" cada hora trabajada y 5 unidades por cada hora de ocio.

i) El individuo se ha marcado como metas el alcanzar al menos 145 u.m. y un nivel de bienestar en la vida de 50 us. ¿Puede alcanzar esas metas? En caso contrario que le sugerirías.

ii) Obtener las mejores soluciones por compromiso en norma 1, 2 e infinito.

EJEMPLO 2: Solver

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO								
		Z1*	Z2*		Z1*-Z1(X)	Z2*-Z(X)	(Z1*-Z1(X))^2	(Z2*-Z(X))^2
		140	46		11	27,5862069	121,76	760,9988109
Lp	*v*	X1	X2	Zp				
p=1	38,62	14,00	0,00	32				
p=2	882,76	12,8965519	1,10344911	29,71				
p=infinito	22,86	11,71	2,29	22,86				
	Δ	22,8571429						
	Z1*-Z1(X)	11	<	22,8571429				
	Z2*-Z(X)	27,5862069	<	22,8571429				

EJEMPLO 2: Lingo

LINGO - [LINGO Model - EJ2_PPCINF_excel]

File Edit LINGO Window Help

```
MODEL:
SETS:
! Importar la información (variables, restricciones fuertes y débiles) desde Excel;
   VARIABLES/@ole('EJ2_PPC_Lingo.xls')/: VALORES, BENEFICIO, FELICIDAD;
   RESTRICCIONES/@ole('EJ2_PPC_Lingo.xls')/: RHS;
   RxV(RESTRICCIONES, VARIABLES): COE_TEC;
   ENDSETS

! FUNCIÓN OBJETIVO;
   MIN = @SMAX(@ABS(@SUM(VARIABLES (J): VALORES(J) * BENEFICIO(J)) - OPT1),
               @ABS(@SUM(VARIABLES (J): VALORES(J) * FELICIDAD(J)) - OPT2));

! Valor de la función objetivo;
    FO_INF = @SMAX(@ABS(@SUM(VARIABLES (J): VALORES(J) * BENEFICIO(J)) - OPT1),
               @ABS(@SUM(VARIABLES (J): VALORES(J) * FELICIDAD(J)) - OPT2));


! RESTRICCIONES;
@FOR( RESTRICCIONES( I): [TECNICAS]
 @SUM( VARIABLES( J): COE_TEC( I, J) * VALORES( J)) <= RHS( I));


! COTAS;
@FOR( VARIABLES(J): VALORES(J) >= 0);

DATA:
! Importar los datos desde Excel;
   RHS, COE_TEC, BENEFICIO, FELICIDAD = @OLE('EJ2_PPC_Lingo.xls', 'RHS', 'COE_TEC', 'BENEFICIO', 'FELICIDAD');
   OPT1, OPT2 = @OLE('EJ2_PPC_Lingo.xls', 'OPT1', 'OPT2');

! Exportar la solución a Excel;
   @OLE('EJ2_PPC_Lingo.xls', 'VALORESINF', 'FO_INF')= VALORES, FO_INF;
ENDDATA

END
```

For Help, press F1 | NUM | MOD | Ln 35, Col 4 | 8:15 am

EJEMPLO 2: Lingo

LINGO - [Solution Report - EJ2_PPCINF_excel]

File Edit LINGO Window Help

```
Transfer Method:       OLE BASED
Workbook:              EJ2_PPC_Lingo.xls
Ranges Specified:               2
    VALORESINF
    FO_INF
Ranges Found:                   2
Range Size Mismatches:          0
Values Transferred:             3


                   Variable           Value        Reduced Cost
                       OPT1        140.0000            0.000000
                       OPT2        46.00000            0.000000
                     FO_INF        22.85714            0.000000
              VALORES( X1)        11.71429            0.000000
              VALORES( X2)        2.285714            0.000000
            BENEFICIO( X1)        10.00000            0.000000
            BENEFICIO( X2)        0.000000            0.000000
            FELICIDAD( X1)        1.000000            0.000000
            FELICIDAD( X2)        5.000000            0.000000
                  RHS( G1)        14.00000            0.000000
                  RHS( G2)       -5.000000            0.000000
                  RHS( G3)        8.000000            0.000000
          COE_TEC( G1, X1)        1.000000            0.000000
          COE_TEC( G1, X2)        1.000000            0.000000
          COE_TEC( G2, X1)       -1.000000            0.000000
          COE_TEC( G2, X2)        0.000000            0.000000
          COE_TEC( G3, X1)        0.000000            0.000000
          COE_TEC( G3, X2)        1.000000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        22.85714           -1.000000
                          2        0.000000            0.000000
              TECNICAS( G1)        0.000000            3.571429
              TECNICAS( G2)        6.714286            0.000000
              TECNICAS( G3)        5.714286            0.000000
                          6        11.71429            0.000000
                          7        2.285714            0.000000
```

For Help, press F1 NUM MOD Ln 1, Col 3 8:19 am